Schulinterner Lehrplan

Gymnasium am Neandertal

Sekundarstufe II:

Einführungs- und Qualifikationsphase

GYMNASIUM
AM NEANDERTAL

Mathematik

(Fassung vom 28.04.2025)

Dar, Scu, Scz & Tam

Inhalt

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit... Fehler! Textmarke nicht definiert.

2 Entscheidungen zum Unterricht 6

2.1 Abfolge verbindlicher Unterrichtsvorhaben 7

2.2 Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit..................53

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung.......... 54

2.4 Lehr- und Lernmittel 59

2.5 Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE) ……………………………………60

3 Prüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Lehrplans.....................61

1 Rahmenbedingungen der fachlichen Arbeit

Das Gymnasium am Neandertal hat ca. 770 Schülerinnen und Schüler und befindet sich im ländlichen Raum mit guter Verkehrsanbindung zu einer nahe gelegenen Großstadt. Mit Ausnahme des 2019 eingeschulten Jahrgangs ist die Schule seit 2016 vierzügig und hat etwa 100 Schülerinnen und Schüler in jedem Jahrgang. Die Lehrerbesetzung der Schule ermöglicht einen ordnungsgemäßen Fachunterricht in der Sekundarstufe II nach Stundentafel.

Stundentafel (in Minuten)

Jahrgang	EF	EF VT M	Q1	Q2	Q1/Q2 VT M
Unterricht GK	**90**	**60**	**90**	**90**	**90**
Unterricht LK	**-**	**-**	**180**	**180**	**-**
LZ GK & LK	**45**	**30**	**45**	**45**	**-**

Die Teilnahme am Mathe Vertiefungskurs (VT M) wird in der EF allen Schülerinnen und Schülern empfohlen und die Kurse werden bei den gleichen Fachkollegen und in der gleichen Zusammensetzung (bis auf diejenigen Schüler, die freiwillig abwählen) wie die Grundkurse unterrichtet. In der Q1/Q2 werden Mathe Vertiefungskurse ebenfalls angeboten, in ihnen gibt es aber keine Lernzeit, sondern 90 Minuten Unterricht. Wenn es von der Lehrerauslastung möglich ist, werden auch hier in der Q2 Vertiefungskurse parallel zu den Grundkursen eingerichtet.

Fachliche Bezüge zum Leitbild der Schule

In unserem Schulprogramm formulieren wir als Leitgedanken für die gemeinsame Arbeit und als grundlegendes Ziel unserer Schule, die persönliche Entwicklung in sozialer Verantwortung aller am Schulleben beteiligten Personen gewissenhaft in den Blick zu nehmen und alle Lernenden bestmöglich zu fördern. Es ist uns ein wichtiges Anliegen, Lernen in eigener Verantwortung aktiv erfahrbar zu machen.

Dabei greift das Fach Mathematik in allen Inhaltsbereichen aktuelle und für Schülerinnen und Schüler relevante Themen z.B. des Verbraucherschutzes, der Digitalisierung, der ökologischen Bildung auf. Durch das Lernen mit verschiedenen auch digitalen Medien in unterschiedlichen Sozialformen und unter Berücksichtigung individueller Lernwege werden altersgerecht Aufgeschlossenheit und Neugier geweckt und Schülerinnen und Schüler zu eigenständigem Handeln angeleitet. Die Mathematik steht durch ihre Universalität in enger Verbindung zu einer Vielzahl anderer Disziplinen der Geistes- und Naturwissenschaften. Eine verstärkte Zusammenarbeit und Koordinierung der Fachbereiche ermöglicht komplexe Lerngegenstände umfassend darzustellen und Bezüge zwischen Inhalten der Fächer herzustellen, sodass ein wesentlicher Beitrag zur vertieften Allgemeinbildung geleistet werden kann. An Problemstellungen werden vorhandene Kenntnisse selbstständiger Lern- und Denkstrategien aufgegriffen und weiterentwickelt.

Gemäß dem Schulprogramm sollen insbesondere die Lernenden als Individuen mit jeweils besonderen Fähigkeiten, Stärken und Interessen im Mittelpunkt stehen. Die Fachgruppe vereinbart, der individuellen Kompetenzentwicklung (Referenzrahmen[1] Kriterium 2.2.1) und den herausfordernd und kognitiv aktivierenden Lehr- und Lernprozessen (Kriterium 2.2.2) besondere Aufmerksamkeit zu widmen. Die Planung und Gestaltung des Unterrichts soll sich deshalb an der Heterogenität der Schülerschaft orientieren (Kriterium 2.6.1).

Im Rahmen von Arbeitsgemeinschaften erhalten Schülerinnen und Schüler erweiterte Bildungsangebote. So werden Schülerinnen und Schüler mit besonderer Begabung in verschiedenen Angeboten gezielt gefördert, z.B. durch die freiwillige Teilnahme am Känguru-Wettbewerb (erfolgreiche Ergebnisse finden Berücksichtigung in der SoMi-Note); wechselnde Arbeitsgemeinschaften im mathematischen Bereich; eine Möglichkeit zur Teilnahme an der Mathematik-Olympiade von der Erprobungsstufe bis zur Oberstufe.

Geeignete Lernende der Jahrgangsstufe 8 bis zur Oberstufe können darüber hinaus im Programm „Schülernachhilfe“ mit Begleitung durch Lehrkräfte tätig werden. Dadurch erhalten unsere jüngeren Schülerinnen und Schüler kompetente Unterstützung beim produktiven Üben im Fach Mathematik. Materialien zum individualisierten Lernen (z.B. Arbeitsblätter, Lernvideos (z.B. Sofatutor), Online-Kurse) unterstützen den Lernenden beim Kompetenzerwerb im Unterricht im Rahmen von Lernzeiten.

Ab der Jahrgangsstufe 5.2 bieten wir Förderkurse in Kleingruppen an, welche von Fachlehrkräften (unterstützt durch kooperierende Grundschulkolleginnen) oder kompetenten Schülerinnen und Schüler der Oberstufe unterrichtet werden.

Fachliche Bezüge zu den Rahmenbedingungen des schulischen Umfelds

Von den Fachlehrkräften besitzen alle die Fakultas für die Sekundarstufe I und ein großer Teil der Lehrkräfte zusätzlich die Fakultas für die Sekundarstufe II.

Der Unterricht der Einführungsphase (EF) ist darauf abgestimmt, dass den Schülerinnen und Schülern der Wechsel an das Gymnasium gelingt. Mit der Realschule ist ein Konzept für den Übergang an unser Gymnasium vereinbart worden, außerdem kooperiert die Schule mit dem Gymnasium im Nachbarstadtteil Hochdahl und richtet in der Qualifikationsphase gemeinsame LKs ein (Koop-LK)..

Die Fachkonferenz tritt mindestens einmal pro Schulhalbjahr zusammen, um notwendige Absprachen zu treffen. Zusätzlich treffen sich die Kolleginnen und Kollegen innerhalb jeder Jahrgangsstufe zu weiteren Absprachen regelmäßig.

Um die Lehrkräfte bei der Unterrichtsplanung zu unterstützen, werden die Lernpläne, eigene ausgearbeitete Unterrichtsreihen und Materialien, die zu früheren Unterrichtsprojekten angefertigt und gesammelt worden sind, sowie Materialien von Schulbuchverlagen digital bereitgestellt. Diese werden im Rahmen der Unterrichtsentwicklung laufend ergänzt, überarbeitet und weiterentwickelt.

Fachliche Bezüge zu schulischen Standards zum Lehren und Lernen

Den im Schulprogramm ausgewiesenen Zielen, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern und ihnen Orientierung für ihren weiteren Lebensweg zu geben, fühlt sich die Fachgruppe Mathematik in besonderer Weise verpflichtet.

[1] https://www.schulentwicklung.nrw.de/referenzrahmen/

In den Lernzeiten können die zwischen den Lernenden und der Fachlehrkraft abgestimmten individuellen Lernvereinbarungen unter fachlich kompetenter Betreuung (vgl. Schülernachhilfe oder Förderkurse) auch begleitend zum Unterricht genutzt werden.

Schülerinnen und Schüler aller Klassen werden zur Teilnahme an mathematischen Wettbewerben motiviert (s.o.).

Für den Fachunterricht aller Stufen besteht Konsens darüber, dass mathematische Fachinhalte mit Lebensweltbezug vermittelt werden. Dazu werden ausgewählte Kontexte im Rahmen der Unterrichtsvorhaben in Kapitel 2.1 verbindlich innerhalb der Fachgruppe festgelegt. In der Sekundarstufe II wird verlässlich darauf aufgebaut, dass die Verwendung von Kontexten im Mathematikunterricht bekannt ist und viele Aufgaben mit Kontextbezug bearbeitet.

Weitere getroffene Absprachen innerhalb der Fachgruppe sind:

- Einsatz von digitalen Hilfsmitteln
    - Tablets mit einer dynamischen Multirepräsentations-Software[2] ab Jahrgangstufe 7
    - Einführung eines Taschenrechners ab Jahrgangstufe 7
- Einbindung des Mathematikunterrichts in das Konzept der Lernzeiten
- Nutzung des Regelhefts als Arbeitslexikon (mathematische Zusammenhänge und Regeln)
- Führen eines Lerntagebuchs in abgesprochenen Unterrichtsvorhaben (Strategien zum Problemlösen, Argumentieren, Modellieren)
- Arbeit mit Kompetenzchecklisten, Selbst- und Partnerdiagnose
- Vorbereitung und Evaluation von parallel durchgeführten Klassenarbeiten und der Standardüberprüfungen (Zentrale Klausur EF und Zentralabitur)

Fachliche Zusammenarbeit mit außerunterrichtlichen Partnern

Im Zusammenhang mit der Berufsorientierung bestehen Kooperationen mit verschiedenen kleineren und mittelständischen Betrieben im schulischen Umfeld, die bei einzelnen Unterrichtsvorhaben als außerschulische Lernorte einen festen Bestandteil der unterrichtlichen Arbeit bilden.

Im Rahmen der Studien- und Berufsorientierung bestehen verschiedene Kooperationen und Angebote, die ebenfalls vielfältig zur thematischen Anreicherung des Mathematikunterrichts genutzt werden, sowie die Hochschultage in der Q1.

Verantwortliche der Fachgruppe:

Fachkonferenzvorsitz: Frau Darmstädter

Stellvertretung: Frau Schultz

[2] vgl. z.B.: Elschenbroich, Hans-Jürgen (2016). Perspektivwechsel durch dynamische Software. In Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM) (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2016*. https://eldorado.tu-dortmund.de/handle/2003/35612 (Datum des letzten Zugriffs: 10.1.2020)

2.1 Unterrichtsvorhaben

In der nachfolgenden Übersicht über die *Unterrichtsvorhaben* wird die für alle Lehrerinnen und Lehrer gemäß Fachkonferenzbeschluss verbindliche Verteilung der Unterrichtsvorhaben dargestellt. Die Übersicht dient dazu, für die einzelnen Jahrgangsstufen allen am Bildungsprozess Beteiligten einen schnellen Überblick über Themen bzw. Fragestellungen der Unterrichtsvorhaben unter Angabe besonderer Schwerpunkte in den Inhalten und in der Kompetenzentwicklung zu verschaffen. Dadurch soll verdeutlicht werden, welches Wissen und welche Fähigkeiten in den jeweiligen Unterrichtsvorhaben besonders gut zu erlernen sind und welche Aspekte deshalb im Unterricht hervorgehoben thematisiert werden sollten. Unter den Hinweisen des Übersichtsrasters werden u.a. Möglichkeiten im Hinblick auf inhaltliche Fokussierungen und interne Verknüpfungen sowie Möglichkeiten der Vertiefung ausgewiesen.

Der ausgewiesene Zeitbedarf versteht sich als grobe Orientierungsgröße, die nach Bedarf über- oder unterschritten werden kann. Der schulinterne Lehrplan ist so gestaltet, dass er zusätzlichen Spielraum für Vertiefungen, besondere Schülerinteressen, aktuelle Themen bzw. die Erfordernisse anderer besonderer Ereignisse (z.B. Praktika, Klassenfahrten o.Ä.) belässt. Abweichungen über die notwendigen Absprachen hinaus sind im Rahmen des pädagogischen Gestaltungsspielraumes der Lehrkräfte möglich. Sicherzustellen bleibt allerdings auch hier, dass im Rahmen der Umsetzung der Unterrichtsvorhaben insgesamt alle Kompetenzerwartungen des Kernlehrplans Berücksichtigung finden.

Abfolge verbindlicher Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase	
E-A1: Grundlagen von Funktionen und Einfluss von Parametern	
E-A2: Ganzrationale Funktionen	
E-A3: Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate	
E-A4: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen	
E-G1: Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen	
E-G2: Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum	
Grundkurs Q1	**Leistungskurs Q1**
GK-A1: Fortsetzung der Differentialrechnung	LK-A1: Fortsetzung Differentialrechnung
GK-A2: Integralrechnung	LK-A2: Integralrechnung
GK-G1: Vektoren, Geraden und Winkel	LK-G1: Vektoren, Geraden und Winkel
GK-G2: Ebenen	LK-G2: Ebenen
	LK-G3: Lagebeziehungen und Abstandsberechnungen
GK-S1: Statistik und Wahrscheinlichkeit	LK- S1: Statistik und Wahrscheinlichkeit
Grundkurs Q2	**Leistungskurs Q2**
GK-S2: Binomialverteilung	LK- S2: Binomialverteilung
	LK-S3: Prognoseintervalle - Konfidenzintervalle - Normalverteilung
GK-A3: Exponentialfunktionen	LK-A3: Exponentialfunktionen
GK-A4: Weitere Funktionen	LK-A4: Weitere Funktionen

Übersicht über die Unterrichtsvorhaben

Einführungsphase

Unterrichtsvorhaben I: ***Grundlagen von Funktionen und Einfluss von Parametern*** *(E-A1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 15 Ustd. (60min.))

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: Lineare und quadratische Funktionen, Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, trigonometrische Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen
(3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion)
(4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Operieren

(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt

(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch

(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten

(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden

(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem1 (MMS) zum ...

- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen

Modellieren

(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung

(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle

(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells

(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung

Problemlösen

(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein

(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern

Argumentieren

(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente

(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch)

(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit

Kommunizieren

(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren

(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung

Umsetzung:
Die Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten werden mithilfe eines MMS untersucht und systematisiert (Verlauf, Symmetrie, besondere Punkte, Definitions- und Wertebereich, Verhalten für $x \to \pm\infty$). Dabei spielen Darstellungswechsel eine besondere Rolle. Unter Berücksichtigung von bekannten und neu eingeführten Fachbegriffen und logischen Strukturen werden Zusammenhänge erkundet und erklärt. Die Kompetenzen im Bereich der Bildungs- und Fachsprache lassen sich sprachsensibel weiterentwickeln.

Die Transformationen (Verschiebung und Streckung jeweils in Richtung beider Achsen) werden anknüpfend an eine Systematisierung und ausgehend von den quadratischen Funktionen (Scheitelpunktform) auf Potenzfunktionen übertragen. Dabei wird der Einfluss der Parameter auf die Eigenschaften dieser Funktionen erkundet. Erweitert wird das Thema der Transformationen noch um die Spiegelungen an den Koordinatenachsen.

Anschließend wird die aus der SI bekannte Sinusfunktion wiederholt und in Bezug auf Fachbegriffe (Amplitude, Periode) fundiert und um die Transformationen erweitert.

Ein besonderes Augenmerk muss in diesem Unterrichtsvorhaben auf die Einführung und Wiederholung der elementaren Bedienkompetenzen des MMS gerichtet werden, wobei der Fokus auf der Darstellung von Graphen inklusive Einstellungen sowie auf der Erstellung von Wertetabellen liegt.

Unterrichtsvorhaben II: *Ganzrationale Funktionen (E-A2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 11 Ustd. (60min.))

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten, ganzrationale Funktionen

- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Transformationen: Spiegelung an den Koordinatenachsen, Verschiebung, Streckung

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel
(4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehören Parameter
(18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten
(19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Operieren
(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt
(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden
(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem1 (MMS) zum ...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen

Modellieren
(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung

Problemlösen
(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern)
(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein

Argumentieren
(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente
(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch)
(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit

Umsetzung:
Ausgehend von den Potenzfunktionen werden die ganzrationalen Funktionen definiert und ihre Eigenschaften untersucht. Mithilfe des Graphen werden schon in diesem Unterrichtsvorhaben Monotonie und (lokale) Extrempunkte fachsprachlich eingeführt und anschaulich diskutiert. Im Rahmen der Nullstellenberechnung werden algebraische Rechentechniken der SI ohne Hilfsmittel wiederholt und erweitert. Auch die Vorteile einer Darstellung mithilfe von Linearfaktoren und die Bedeutung der Vielfachheit einer Nullstelle werden hier thematisiert. Verschiedene Wege zur

Berechnung der Nullstellen werden verglichen und beurteilt, dabei auftretende Fehler werden analysiert. Zur Differenzierung werden diese im Vertiefungskurs wiederholt und vertieft.

__Unterrichtsvorhaben III:__ *Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate (E-A3)*
(**Zeitbedarf**: ca. 14 Ustd. (60 min.))

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sach-kontext
(6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen
(7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim_{x \to \cdots} f(x)$
(8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen
(9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel
(10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion)
(11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen
(13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten
(14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Operieren
(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt
(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch
(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden
(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem1 (MMS) zum ...
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
  - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen
  - Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern

Modellieren
(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen

(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit

Problemlösen
(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern)
(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein
(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern
(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz

Argumentieren
(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur
(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente
(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten
(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch)
(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit

Kommunizieren
(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren
(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent

Umsetzung:
In verschiedenen Anwendungskontexten (z.B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, …) werden durchschnittliche Änderungsraten, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran Sekanten betrachtet, berechnet und im Kontext interpretiert. Dabei werden quadratische Funktionen als Weg-Zeit-Funktion bei Fall-, Wurf- und anderen gleichförmig beschleunigten Bewegungen gedeutet. Neben zeitabhängigen Vorgängen sollen auch Steigungen und Steigungswinkel in realen Sachkontexten (z.B. Brückenbögen, Gebäudeteile, Trassenführungen, Seilbahnen) betrachtet werden.

Der Begriff der lokalen Änderungsrate wird in den eingeführten Sachzusammenhängen vorstellungsgebunden genutzt. Als Kontext für den Übergang von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate wird die vermeintliche Diskrepanz zwischen der Durchschnittsgeschwindigkeit bei einer längeren Fahrt und der durch ein Messgerät (z.B. mithilfe eines Lasers) ermittelten Geschwindigkeit genutzt.

Ein MMS wird zur numerischen und graphischen Darstellung des Grenzüberganges von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente (Zoomen) eingesetzt. Hierbei wird die Limes-Schreibweise verwendet. Der Begriff der Tangente wird in Abgrenzung zu den in der SI aufgebauten Vorstellungen problematisiert und analytisch definiert.

Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden.

Anschließend wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für geeignete einfache Funktionen werden der

Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwendung der Limesschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet.

Um die Ableitungsregel für (höhere) natürliche Potenzen zu vermuten, nutzen die Schülerinnen und Schüler ein MMS. Die Potenzregel für Ableitungen wird formuliert. Eine Beweisidee kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert hier besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens.

Anhand von innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben vertiefen die Schülerinnen und Schüler abschließend ihre erworbenen Kompetenzen und berechnen Gleichungen von Sekanten, Tangenten und Normalen sowie Steigungswinkel.

<u>Unterrichtsvorhaben IV:</u> *Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen (E-A4)*
(**Zeitbedarf**: ca. 7 Ustd. (60 min.))

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung
(15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich
(16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten
(17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung
(18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten
(19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mit- hilfe von ganzrationalen Funktionen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Operieren
(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt
(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus
(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden
(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem1 (MMS) zum ...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen

Modellieren
(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung

Problemlösen

(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein
(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern

Argumentieren
(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur
(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen
(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente
(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch)
(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit

Kommunizieren
(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren
(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung

Umsetzung:
Die Beschäftigung mit ganzrationalen Funktionen vom Grad größer gleich drei erfordert auf der rechnerischen Ebene die Anwendung der Summen- und Faktorregel für Ableitungen, von denen mindestens eine bewiesen wird. Durch gleichzeitiges Visualisieren einer Ausgangsfunktion und ihrer Ableitungsfunktion entdecken die Lernenden die Zusammenhänge zwischen charakteristischen Punkten der beiden Graphen, woran im Folgenden angeknüpft wird.

Für ganzrationale Funktionen werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und den Nullstellen ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der möglichen Fälle bezogen auf Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung vertieft untersucht. Die Schülerinnen und Schüler üben damit, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden Bedingungen zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren. Dieses führt auch zur Unterscheidung von lokalen und globalen Extremstellen.

Ausgehend von graphischen Darstellungen schließen sich Untersuchungen zum Krümmungsverhalten und damit die Betrachtung von Wendestellen an. Höhere Ableitungen werden auch im Rahmen von hinreichenden Bedingungen zur Bestimmung von Extrem- und Wendestellen genutzt. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft.

Unterrichtsvorhaben V: *Unterwegs in 3D – Koordinatisierung des Raumes und Vektoroperationen (E-G1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 7 Ustd. (60 min.))

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren
- Vektoroperationen: Addition, Multiplikation mit einem Skalar
- Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,

(2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar,
(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit,
(4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras,
(5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,
(6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.
(10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Operieren
(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt
(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese
(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven
(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen
(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden
(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem1 (MMS) zum ...
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum

Modellieren
(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung

Problemlösen
(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern)
(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein

Argumentieren
(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente
(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten
(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch)
(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit

Kommunizieren
(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren

(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung

Umsetzung:
Ausgangspunkt ist eine Vergewisserung (z.B. in Form einer Mindmap) hinsichtlich der den Schülerinnen und Schülern bereits bekannten Koordinatisierungen (kartesische Koordinaten, geographische Koordinaten, GPS, Robotersteuerung).

An geeigneten, nicht zu komplexen geometrischen Modellen (z.B. Quader) wiederholen die Schülerinnen und Schüler die aus der Sekundarstufe I bekannten Schrägbilder und nutzen ein MMS, um unterschiedliche Schrägbilder darzustellen und hinsichtlich ihrer Wirkung zu beurteilen.

Parallel zur Entwicklung einer angemessenen Raumvorstellung wird auch an der Entwicklung einer adäquaten Symbolsprache gearbeitet. Die Informationen dazu (Darstellung mit Ortsvektoren und Verschiebungsvektoren) kommen von der Lehrkraft und werden von den Schülerinnen und Schülern im Rahmen von Aufgaben angewendet. Die Darstellung in räumlichen Koordinatensystemen sollte hinreichend geübt werden.

Verkettungen von Verschiebungen führen graphisch und algebraisch zur Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar.

Mithilfe von Vektoren werden Punkte und Strecken (z.B. Mittelpunkte, Schnittpunkte, Diagonalen, Kanten) geometrischer Figuren in unterschiedlichen Darstellungsformen ermittelt und Eigenschaften geometrischer Figuren (Viereckstypen) und besonderer Punkte (z.B. Teilungsverhältnis) nachgewiesen. Dabei wird auch der Begriff Kollinearität eingeführt und verwendet. Die Länge einer Strecke wird mithilfe des Satzes des Pythagoras bestimmt.

Vernetzung:

Physik: Kräfte und ihre Addition

<u>Unterrichtsvorhaben VI:</u> *Vektoren und Geraden – Bewegungen in den Raum (E-G2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 12 Ustd. (60 min.))

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Geraden und Strecken: Parameterform
- Lagebeziehungen von Geraden: identisch, parallel,
- windschief, sich schneidend
- Schnittpunkte: Geraden

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum
(2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinaten-system dar
(3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Sachkontexten als Geschwindigkeit
(5) addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität
(7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar
(8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext,
(9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden

(10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge
(11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen
(12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Operieren
(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt
(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus
(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden
(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem1 (MMS) zum ...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern

Modellieren
(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells
(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit

Problemlösen
(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein
(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern

Argumentieren
(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur
(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente
(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit
Kommunizieren
(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren
(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung

Umsetzung:
Zunächst wird ein geometrisches Objekt in einem Sachkontext durch Vektoren beschrieben. Dabei werden wiederholend die aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 bekannten Eigenschaften und Operationen von Vektoren genutzt und vertieft, um parallele Seiten und besondere Punkte zu ermitteln. Daran anschließend werden lineare Bewegungen z.B. im Kontext von Flugbahnen (Kondensstreifen) durch Startpunkt, Zeitparameter und Geschwindigkeitsvektor beschrieben. Dabei sollten Modellierungsfragen (reale Geschwindigkeiten, Größe der Flugobjekte, Flugebenen) einbezogen und diskutiert werden.

Eine Vertiefung kann darin bestehen, den Betrag der Geschwindigkeit zu variieren. In jedem Fall soll der Unterschied zwischen einer Geraden als Punktmenge (z.B. die Flugbahn) und einer Parametrisierung dieser Punktmenge als Funktion (von der Parametermenge in den Raum) herausgearbeitet werden. Auch die Parametrisierung einer Strecke wird in diesem Rahmen thematisiert.

Ergänzend zum dynamischen Zugang wird die rein geometrische Frage aufgeworfen, wie eine Gerade durch zwei Punkte zu beschreiben ist. Hierbei wird herausgearbeitet, dass zwischen unterschiedlichen Parametrisierungen einer Geraden gewechselt werden kann. Punktproben sowie Berechnungen sollen auch ohne Hilfsmittel durchgeführt werden.

Im Anwendungskontext (z.B. Kondensstreifen von Flugzeugen) werden Lagebeziehungen von Geraden untersucht und systematisiert. Die Untersuchung von Schnittpunkten zweier durch Geraden modellierter Flugbahnen führt dabei auf ein lineares 3x2-Gleichungssystem. Einen Bezug zu den unterschiedlichen Lagebeziehungen können die SuS herstellen, wenn sie zugleich die auf eine Landkarte reduzierte Situation mit nur zwei Gleichungen untersuchen. Einfache lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen werden als Wiederholung aus der Sekundarstufe I ohne Hilfsmittel gelöst, für komplexere LGS wird ein MMS verwendet. Ein algorithmisches Lösungsverfahren (z.B. der Gauß-Algorithmus) wird später in der Qualifikationsphase bei Ebenen eingeführt und geübt.

Summe Einführungsphase: 90 Stunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 66 Stunden

Qualifikationsphase
Grundkurs Q1

Unterrichtsvorhaben GK-1: *Fortsetzung der Differentialrechnung (GK-A1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 20 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Funktionen: ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung des Differentialrechnung: Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(1) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, [...], der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
(3) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben
(4) erläutern den Begriff der Umkehrfunktion am Beispiel der Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs,
(5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, [...] sowie der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ [...].
(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung
(20) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen [...].

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus
Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,

Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.

Umsetzung:
Gestartet wird mit einer Wiederholung zum Thema Funktionen untersuchen. Anschließend werden Extremwertprobleme unter der Berücksichtigung von Nebenbedingungen für ganzrationale Funktionen behandelt. Exemplarisch wird als Einstiegsproblem die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, gewählt. Dabei fördert das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen die Problemlösestrategien. An mindestens einem Problem im Sachzusammenhang entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$. Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden.

Anschließend wird als Exkurs exemplarisch die Wurzelfunktion unter Berücksichtigung des Graphen sowie des Definitions- und des Wertebereichs als Umkehrfunktion betrachtet.

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrien, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der

Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen finden. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden. Anknüpfend an die Einführungsphase werden in innermathematischen Situationen und in unterschiedlichen Kontexten (z.B. Fotos von Brücken, Gebäuden, Flugbahnen) ganzrationale Funktionen mit Parametern aufgestellt und mithilfe eines MMS untersucht. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden.

Unterrichtsvorhaben GK-2: *Integralrechnung (GK-A2)*

(**Zeitbedarf**: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen im Kontext der Fragestellung
(11) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
(12) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung
(13) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion
(14) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
(15) erläutern geometrisch-anschaulich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und wenden ihn an
(16) nutzen vorgegebene Stammfunktionen und bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen
(17) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
(18) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion
(19) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

Der Einstieg kann über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln und vergleichen eigenständig unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsumme, Ober- oder Untersumme) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen“ zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die

Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen, die zur Definition des Integrals führen.

Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird durch geometrisch-anschauliche Überlegungen begründet und damit der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung aufgestellt. Die Bedeutung des Hauptsatzes und seine Anwendung werden in verschiedenen Kontexten vertieft.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen von Stammfunktionen werden für ganzrationale Funktionen von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden auf weitere innermathematische bzw. anwendungsorientierte Situationen übertragen, die auch Flächen zwischen Funktionsgraphen umfassen. Bei geeigneten Problemstellungen werden die Intervalladditivität und Linearität des Integrals thematisiert. Geeignete Problemstellungen werden in diesem Unterrichtsvorhaben auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

<u>Unterrichtsvorhaben GK-3:</u> *Vektoren, Geraden und Winkel (GK-G1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 11 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Vektoroperation: Skalarprodukt
- Schnittwinkel: Geraden

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(5) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten
(9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechen-fertigkeiten sicher an
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Darstellen geometrischer Situationen im Raum
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,

Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:

Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist jedoch die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont. Dieses wird am Beispiel der Kräftezerlegung (z.B. Zerlegung in vertikale und horizontale Komponenten beim Schlittenziehen) veranschaulicht.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben E-G1 werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die formale Frage nach der Bedeutung eines Produkts von zwei Vektoren sowie den dabei gültigen Rechengesetzen wird im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. Division durch einen Vektor) und vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen gestellt.

Unterrichtsvorhaben GK-4: *Ebenen (GK-G2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 16 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(2) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
(3) verwenden Koordinatenformen von Ebenen zur Orientierung im Raum (Punktprobe, Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, Normalenvektor),
(4) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,
(5) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten
(6) nutzen Symmetriebetrachtungen in geometrischen Objekten zur Lösung von Problemstellungen und spiegeln Punkte an Ebenen in einfachen Fällen
(7) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
(8) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.
(9) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells.
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungs-wege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus.
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.

Umsetzung:

Einleitend wird das Gauß-Verfahren als algorithmisches Lösungsverfahren für LGS für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel eingeführt.

Die Koordinatenform $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ wird anknüpfend an Geradengleichungen $a \cdot x + b \cdot y = d$ in der Ebene durch Erweitern um eine Variable eingeführt. Zur Erkundung soll eine Visualisierung mit einem MMS dienen, bei der die Achsenabschnitte $a_i = d/n_i$ (für $n_i \neq 0$) ins Spiel kommen, die in der Achsenabschnittsform $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$ auftreten. Diese Form bietet den Vorteil, eindeutig zu sein, und erlaubt es, die Lage der Ebene im Koordinatensystem zeichnerisch darzustellen.

Die Schnittpunktberechnung (Durchstoßpunkt) zwischen Geraden und Ebenen ist mit der Koordinatenform besonders einfach, wenn ein allgemeiner Punkt der Gerade (parametrisierte Punktmenge) in die Koordinatenform eingesetzt wird. Die Achsenabschnittsberechnung ordnet sich dabei als Spezialfall ein. Auch Spurgeraden in den Hauptebenen werden mit dem Einsetzungsprinzip ermittelt.

Die Notation des eingeführten Skalarproduktes $\vec{n} \cdot \vec{x} = d$ führt zur Deutung von $\vec{n}$ als Normalenvektor, der senkrecht auf der Ebene steht. Der Einfluss von d, mit dem sich die Ebene parallel verschieben lässt, wird erkundet. Um eine Gleichung einer Ebene aus drei Punkten aufzustellen, soll dies dem Prinzip einer Steckbriefaufgabe folgend mit einem 3x3-Gleichungssystem durch Einsetzen der drei Punkte in die Gleichung $n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d$ erfolgen, wobei *d* als Parameter im MMS mitläuft oder $d = 1$ (in Sonderfällen $d = 0$) gesetzt werden kann.

Als Kontext für die anschließend zu thematisierende Parameterform einer Ebene dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Thema E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Der Übergang zur Koordinatenform erfolgt als Alternative zum „Steckbriefverfahren“ auch durch die Bestimmung eines Normalenvektors mithilfe eines unterbestimmten 2x3-Gleichungssystems. Ein explizites Arbeiten mit der Normalenform soll aber nur im Rahmen einer Differenzierung erfolgen.

Der umgekehrte Übergang von der Koordinatenform zur Parameterform kann über drei Punkte (z.B. die Achsenabschnitte) bewerkstelligt werden, oder indem zwei (zu $\vec{n}$ orthogonale) Spannvektoren der Ebene aus Gleichungen des Typs $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -n_2 \\ n_1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ gewonnen werden.

Geometrische Körper wie u.a. Tetraeder, Pyramiden, Würfel, Prismen und Oktaeder bieten vielfältige Anlässe für offen angelegte geometrische Untersuchungen, können auf reale Objekte bezogen oder auch zur Gestaltung von virtuellen Landschaften benutzt werden. Schattenwürfe geometrischer Körper in Parallelprojektion (Sonnenlicht) oder Zentralprojektion (Lichtquelle) auf eine Ebene, insbesondere die Grundebenen, werden berechnet. Der Einsatz eines MMS bietet hier zusätzliche Möglichkeiten der Variation und der Visualisierung.

Symmetriebetrachtungen (z.B. beim Übergang zur Doppelpyramide / zum Oktaeder) werfen die Frage auf, wie sich Spiegelungen an Ebenen durchführen lassen. In einfachen Fällen, in denen der Normalenvektor in Richtung einer Koordinatenachse weist, werden die Koordinaten eines an der Ebene gespiegelten Punktes ermittelt. Der Nachweis der Symmetrie zu einer gegebenen Ebene wird durch einen Vergleich des Normalenvektors mit dem Verbindungsvektor zwischen Punkt und Spiegelpunkt geführt, wobei zusätzlich eine Punktprobe nötig ist, um zu zeigen, dass der Mittelpunkt in der Ebene liegt.

Winkel lassen sich zwischen den Kanten und Flächen eines Körpers bestimmen. Speziell die Böschungswinkel an einer Pyramide motivieren die Frage nach dem Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen.

<u>Unterrichtsvorhaben GK-5:</u> *Statistik und Wahrscheinlichkeit (GK-S1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln

- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,
(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten
(5) bestimmen das Gegenereignis $\overline{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
(6) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
(7) prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
(8) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
(9) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
(10) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(10)	überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12)	vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Kom-(1)	erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(3)	erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(6)	verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7)	wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus.

Umsetzung:
Es wird mit einer Wiederholung der Grundlagen aus der Sekundarstufe I gestartet. Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung.

Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten, wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).
Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. In diesem Zuge werden insbesondere Urnenmodelle als Vorbereitung für die Q2 wiederholt.

Summe Grundkurs Q1: 90 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 80 Unterrichtsstunden

Qualifikationsphase

Grundkurs Q2

Unterrichtsvorhaben GK-6: *Binomialverteilung (GK-S2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 16 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen
- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(11) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.
(12) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung
(13) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen
(14) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten (...) Zufallsgrößen

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:
Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg" oder „Misserfolg") wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation"). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.

Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm unter Nutzung eines MMS. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomialverteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k, p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen" Spiels aufgreifen.

Die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit wird bewusst als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit interpretiert. Die Genauigkeit dieser Schätzung steigt mit dem Stichprobenumfang.

Unterrichtsvorhaben GK-7: *Exponentialfunktionen (GK-A3)*
(**Zeitbedarf**: ca. 16 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Funktionen: Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, [...], der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen

(5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von [...] der natürlichen Exponentialfunktion [...]

(6) wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an

(9) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^xund erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion (f'=f)

(10) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung

(20) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit

Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen

Umsetzung:

In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter der a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer wiederholenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand.

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden

Annahmen und Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

<u>Unterrichtsvorhaben GK-8:</u> *Weitere Funktionen (GK-A4)*
(**Zeitbedarf**: ca. 14 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben")

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(2) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, [...], der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen
(5) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von [...] der natürlichen Exponentialfunktion [...]
(6) wenden die Kettenregel auf Verknüpfungen der natürlichen Exponentialfunktion mit linearen Funktionen an
(9) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion (f'=f)
(10) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung
(20) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus
Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern)
Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,
Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Umsetzung:
In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) untersucht, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen abgeleitet und mit anderen Funktionen verknüpft werden. Außerdem werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produktregel und Spezialfall der Kettenregel für Verknüpfungen von Exponentialfunktionen mit linearen

Funktionen) hergeleitet. Dazu können zunächst Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Vorgelegte Argumentationsketten werden erläutert, beurteilt und für den Beweis der Produktregel genutzt. Die Kettenregel für Exponentialfunktionen mit linearen Funktionen im Exponenten kann graphisch mithilfe der bekannten Zusammenhänge beim Transformieren von Funktionsgraphen entdeckt werden.

Mithilfe der neu gewonnen Ableitungsregeln werden schließlich in einfachen Fällen zusammengesetzte Funktionen betrachtet und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben verwendet. Dabei ist es mithilfe eines MMS oder mithilfe von vorgegebenen Ableitungen auch möglich, weitere Verkettungen von ganzrationalen Funktionen mit Exponentialfunktionen zu betrachten. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Die Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzenration, Fieber, Pflanzenwuchs…), werden in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. Integrale von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen können in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet werden.

Summe Grundkurs Q1: 68 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 46 Unterrichtsstunden

Qualifikationsphase
Leistungskurs Q1

Unterrichtsvorhaben LK-1: *Fortsetzung der Differentialrechnung (LK-A1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 23 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Funktionen: ganzrationale Funktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung des Differentialrechnung: Funktionsscharen, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben“)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(1) lösen biquadratische Gleichungen auch ohne Hilfsmittel
(2) führen Extremwertprobleme durch Kombination mit Nebenbedingungen auf Funktionen einer Variablen zurück und lösen diese,
(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, [...], der Potenzfunktionen $\sqrt{x}$ und $\frac{1}{x}$ sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen,
(4) bestimmen Parameter einer Funktion mithilfe von Bedingungen, die sich aus dem Kontext ergeben
(5) interpretieren Parameter von Funktionen im Kontext der Fragestellung und untersuchen ihren Einfluss auf Eigenschaften von Funktionsscharen

(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von ganzrationalen Funktionen, [...] sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten [...]
(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen [...] im Kontext der Fragestellung
(8) deuten die Ableitung mithilfe der Approximation durch lineare Funktionen
(23) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, [...]

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
- Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern,

Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Pro-(14) variieren und verallgemeinern Fragestellungen vor dem Hintergrund einer Lösung,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),
Arg-(10) beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent.
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten.

Umsetzung:
Zur Reaktivierung der Vorkenntnisse der Differentialrechnung werden Funktionen vierten Grades untersucht. Dies umfasst insbesondere das hilfsmittelfreie Lösen von biquadratischen Gleichungen.

Anschließend werden Extremwertprobleme unter der Berücksichtigung von Nebenbedingungen für ganzrationale Funktionen behandelt. Exemplarisch wird als Einstiegsproblem die Optimierung einer offenen Schachtel, die aus einem DIN-A4-Papier gefaltet wird, gewählt. Dabei fördert das Aufstellen der Funktionsgleichungen bei Optimierungsproblemen die Problemlösestrategien. In diesem Rahmen werden grundlegende Inhalte der Einführungsphase integrierend wiederholt. An mindestens einem Problem im Sachzusammenhang entdecken die Schülerinnen und Schüler die Notwendigkeit, Randextrema zu betrachten. Mindestens ein Verpackungsproblem (optimale Verpackung) wird unter dem Aspekt der Modellvalidierung/Modellkritik und Modellvariation untersucht. In diesen Kontexten entstehen auch Zielfunktionen, die nicht rein ganzrational sind. In diesem Zusammenhang entwickeln die Schülerinnen und Schüler die Ableitungen der Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten (noch ohne die Produkt- oder Kettenregel). Komplexere Funktionen können mithilfe eines MMS untersucht werden, ohne dass Ableitungen hilfsmittelfrei gebildet werden müssen (z.B. „Zylinder in einer Kugel“).

Anschließend werden Optimierungsprobleme bei Funktionen mit Parametern betrachtet. Hier kann z.B. auch das Problem der offenen Schachtel wieder aufgegriffen werden, indem nicht von einem Papier mit festen Maßen ausgegangen wird, sondern nur ein Seitenverhältnis der Papierseiten vorgegeben wird oder die Länge einer Seite offenbleibt, sodass bei der Zielfunktion eine Parameterabhängigkeit entsteht.

Mit vorgegebenen ganzrationalen Funktionen mit Parametern (Funktionsscharen) werden anknüpfend innermathematische Situationen (Funktionsscharen) und anwendungsbezogene Kontexte mit Parametern (z.B. Brücken, Gebäude, Flugbahnen) untersucht, bei denen Extrempunkte eine Rolle spielen. Hierbei können die Inhalte der Analysis aus der EF aufgegriffen und vertieft werden. Ein MMS wird zum Variieren von Parametern aber auch zum Lösen von Gleichungen mit Parametern verstärkt genutzt.

Im Zusammenhang mit unterschiedlichen Kontexten mit und ohne Anwendungsbezug werden aus gegebenen Eigenschaften (Punkte auf dem Graphen, Symmetrie, Bedingungen an die 1. und 2. Ableitung) lineare Gleichungssysteme für die Parameter ganzrationaler Funktionen entwickelt. Die Schülerinnen und Schüler erhalten die Gelegenheit, über Grundannahmen der Modellierung (Grad der Funktion, Symmetrie, Lage im Koordinatensystem, Ausschnitt) selbst zu entscheiden, die Angemessenheit der Modellierung zu reflektieren und ggf. Veränderungen vorzunehmen. Aufgaben im Anwendungskontext, die Anschlussbedingungen (z.B. knickfrei, ruckfrei) berücksichtigen, lassen sich zum Beispiel bei der Trassierung von Bahngleisen/Straßen. Durch die Wahl geeigneter Modellierungen, z.B. Anstieg des Meeresspiegels, können auch Themen aus dem Kontext *Bildung für nachhaltige Entwicklung* in diesem Unterrichtsvorhaben integriert werden.

Unterrichtsvorhaben LK-2: *Integralrechnung (LK-A2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 26 Ustd.)

Inhaltsfelder: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Integralrechnung: Produktsumme, orientierte Fläche, Bestandsfunktion, Integralfunktion, Stammfunktion, bestimmtes Integral, Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Kompetenzerwartungen:

Funktionen und Analysis (A): Die Schülerinnen und Schüler

(7) untersuchen Funktionen auch in Abhängigkeit von Parametern mithilfe von vorgegebenen und mit dem MMS ermittelten Ableitungen und unbestimmten Integralen („Stammfunktionen“) im Kontext der Fragestellung
(14) interpretieren Produktsummen im Sachkontext als Rekonstruktion des Gesamtbestandes oder Gesamteffektes einer Größe
(15) deuten die Inhalte von orientierten Flächen im Kontext der Fragestellung
(16) skizzieren zum Graphen einer gegebenen Randfunktion den Graphen der zugehörigen Flächeninhaltsfunktion
(17) erläutern und vollziehen an geeigneten Beispielen den Übergang von der Produktsumme zum Integral auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs
(18) begründen den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung unter Verwendung eines anschaulichen Stetigkeitsbegriffs und wenden den Hauptsatz an
(19) bestimmen ohne Hilfsmittel Stammfunktionen ganzrationaler Funktionen, nutzen vorgegebene Stammfunktionen [...]
(20) nutzen die Intervalladditivität und Linearität von Integralen
(21) ermitteln den Gesamtbestand oder Gesamteffekt einer Größe aus der Änderungsrate oder der Randfunktion
(22) ermitteln Flächeninhalte mithilfe von bestimmten Integralen und uneigentlichen Integralen sowie Volumina von Körpern, die durch die Rotation um die Abszisse entstehen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– Ermitteln bestimmter und unbestimmter Integrale auch abhängig von Parametern
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod (2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Pro-(13) benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,
Kom-(13) vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:

Der Einstieg sollte über ein Stationenlernen oder eine arbeitsteilige Gruppenarbeit erfolgen, in der sich die Schülerinnen und Schüler selbstständig eine Breite an Kontexten, in denen von einer Änderungsrate auf den Bestand geschlossen wird, erarbeiten. Außer der Schachtelung durch Ober- und Untersummen sollen die Schülerinnen und Schüler eigenständig weitere unterschiedliche Strategien (z.B. Trapezsummen) zur möglichst genauen näherungsweisen Berechnung des Bestands entwickeln und vergleichen. Die entstehenden Produktsummen werden als Bilanz über orientierte Flächeninhalte interpretiert.

Qualitativ können die Schülerinnen und Schüler so den Graphen einer Flächeninhaltsfunktion als „Bilanzgraphen" zu einem vorgegebenen Randfunktionsgraphen skizzieren. Damit bereitet dieses Unterrichtsvorhaben den Begriff der Integralfunktion anschaulich vor. Die Ergebnisse des Stationenlernens bzw. der Gruppenarbeit werden als Lernprodukte dokumentiert und im Kurs präsentiert. Schülervorträge über bestimmte Kontexte sind hier wünschenswert.

Die erarbeiteten Produktsummen aus der vorhergehenden Arbeitsphase werden nun im Unterricht weiter verfeinert und damit werden immer genauere Flächenabschätzungen vorgenommen. Auch die Orientierung der Flächen kann dabei erneut thematisiert werden. Bei der Berechnung von Produktsummen, die mit dem Summenzeichen notiert sind, kann ein MMS gewinnbringend eingesetzt werden. Die Frage, wie die Genauigkeit der Näherung erhöht werden kann, gibt Anlass zu anschaulichen Grenzwertüberlegungen. Aus den übereinstimmenden Grenzwerten von Ober- und Untersummen ergibt sich die Definition des Integrals.

Ausgehend von der Rekonstruktion eines Bestandes beziehungsweise der Flächeninhaltsfunktion und der Definition des Integrals wird der Begriff der Integralfunktion I_a für einen Anfangswert a erschlossen. Die Vermutung, dass die Integralfunktion eine Stammfunktion ist, wird anschaulich, kontextgebunden und numerisch begründet.

Um den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auch tiefergehend zu begründen, wird der absolute Zuwachs $I_a(x+h) - I_a(x)$ geometrisch durch Rechtecke nach oben und unten abgeschätzt. Der Übergang zur relativen Änderung mit anschließendem Grenzübergang führt dazu, die Stetigkeit von Funktionen zu thematisieren und den Hauptsatz formal exakt zu notieren. In diesem Rahmen werden auch die Intervall-additivität und Linearität des Integrals formal gefasst.

Die Regeln zum Ermitteln von Funktionstermen für Stammfunktionen werden von den Schülerinnen und Schülern durch Rückwärtsanwenden der bekannten Ableitungsregeln selbständig erarbeitet. Dabei finden sie auch heraus, dass dies nicht in jedem Fall möglich ist und es Funktionen wie $f(x) = \frac{1}{x}$ gibt, für deren Stammfunktionen noch kein Funktionsterm zur Verfügung steht.

Die gewonnenen Erkenntnisse werden für die Berechnung von Flächen zwischen Funktionsgraphen genutzt und auf weitere zunehmend komplexe innermathematische und anwendungsorientierte Situationen übertragen. Geeignete Problemstellungen werden auch ohne Hilfsmittel bearbeitet.

Unterrichtsvorhaben LK-3: *Vektoren, Geraden und Winkel (LK-G1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 11 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Vektoroperation: Skalarprodukt
- Schnittwinkel: Geraden

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(2) deuten das Skalarprodukt geometrisch (Orthogonalität, Betrag, Winkel zwischen Vektoren) und berechnen es,
(9) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten
(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechen-fertigkeiten sicher an
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Darstellen geometrischer Situationen im Raum
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein
Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,
Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,
Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.

Umsetzung:
Das Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$ wird zunächst als Indikator für Orthogonalität aus einer Anwendung des Satzes von Pythagoras entwickelt. Zur Entlastung empfiehlt sich für die Herleitung zunächst eine Beschränkung auf zwei Dimensionen. Wesentlich für den Aufbau einer tragenden Grundvorstellung ist die Zerlegung eines Vektors $\vec{a}$ in zu $\vec{b}$ parallele und orthogonale Komponenten. Dadurch wird der geometrische Aspekt der Projektion betont, der später zum Verständnis der Abstandsmessung zwischen Punkten und Ebenen genutzt werden kann.

Eine Exploration der Winkelabhängigkeit des Skalarproduktes mit einem MMS führt zur Wiederentdeckung der Rolle des Kosinus bei der Projektion. Der Kosinus wird genutzt, um den Winkel zwischen zwei Vektoren zu berechnen. Am Beispiel der physikalischen Arbeit wird das geometrische Verständnis des Skalarprodukts veranschaulicht.

Anknüpfend an das Unterrichtsvorhaben aus der EF werden Eigenschaften von Dreiecken und Vierecken auch mithilfe des Skalarprodukts untersucht.

Die besonderen formalen Eigenschaften des Skalarprodukts sowie die dafür gültigen Rechengesetze werden im Zusammenhang mit der Analyse von typischen Fehlern (z.B. keine Division durch einen Vektor, kein Satz vom Nullprodukt) sowie vor dem Hintergrund der Verallgemeinerung bekannter Rechenregeln für Zahlen thematisiert.

Vertiefung:

- Im Rahmen eines arbeitsteiligen Vorgehens kann ein Vergleich von Lösungswegen mit und ohne Skalarprodukt dahinterliegende elementargeometrische Sätze transparent machen wie z.B. die Äquivalenz der zum Nachweis einer Raute benutzten Bedingungen $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = 0$ und $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$ für die Seitenvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eines Parallelogramms. Ein ähnliches Vorgehen ist beim Beweis des Satzes des Thales möglich.

Im Sinne der Wissenschaftspropädeutik ist neben einem Einblick in die Möglichkeit einer axiomatischen Festlegung eines Skalarproduktes durch seine algebraischen Eigenschaften wichtig, dass durch ein Skalarprodukt zugleich Längen- als auch Winkelmessung in einem Vektorraum ermöglicht werden.

<u>Unterrichtsvorhaben LK-4:</u> *Ebenen (LK-G2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 19 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Ebenen: Parameterform, Koordinatenform, Normalenvektor
- Schnittwinkel: Geraden, Geraden und Ebenen, Ebenen
- Schnittpunkte: Geraden und Ebenen
- Lineare Gleichungssysteme

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(1) stellen Ebenen in Parameterform und in Koordinatenform dar,
(3) stellen Ebenen in Normalenform sowie in Koordinatenform dar und nutzen diese zur Orientierung im Raum
(5) berechnen Schnittpunkte von Geraden mit Ebenen,

(6) erläutern ein algorithmisches Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme

(7) wenden ein algorithmisches Lösungsverfahren ohne digitale Mathematikwerkzeuge auf Gleichungssysteme mit maximal drei Unbekannten an, die mit geringem Rechenaufwand lösbar sind.
(8) interpretieren die Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen
(9) berechnen die Größe des Schnittwinkels zwischen zwei sich schneidenden Objekten
(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematik-System (MMS) zum…
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum,

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells.
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein
Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen
Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungs-wege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus.
Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Arg (5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,
Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.

Umsetzung:
Einleitend wird das Gauß-Verfahren als algorithmisches Lösungsverfahren für LGS für einige gut überschaubare Systeme mit drei Unbekannten auch ohne digitale Hilfsmittel eingeführt und die Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme.

Anschließend wird die als Punkt-Normalenform bekannte Gleichung: $\vec{u} \cdot (\vec{x} - \vec{a}) = 0$ betrachtet. Durch systematisches Probieren oder Betrachten von Spezialfällen wie $\vec{a} = \vec{0}$ wird die Lösungsmenge geometrisch als Ebene gedeutet. Die Schnittmenge zweier Ebenen wird durch Lösung eines linearen 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Dabei müssen die Lernenden eine nicht leere Lösungsmenge selbständig parametrisieren und als Schnittgerade identifizieren. Zur Klärung der Parallelität von Geraden und Ebenen oder Ebenen untereinander werden Normalenvektoren herangezogen. Über die Normalenvektoren wird die Winkelberechnung zwischen zwei Vektoren auch auf Ebenen übertragen.

Die unterschiedlichen Darstellungsformen dieser Ebenengleichung und ihre jeweilige geometrische Deutung (Koordinatenform, Achsenabschnittsform) werden in einem Gruppenpuzzle gegenübergestellt und in Beziehung gesetzt. Dabei intensiviert der kommunikative Austausch die fachlichen Aneignungsprozesse. Als weitere Darstellungsform wird nun die Parameterform der Ebenengleichung entwickelt. Als Einstiegskontext dient z.B. eine Dachkonstruktion mit Sparren und Querlatten. Damit wird die Idee der Koordinatisierung aus dem Unterrichtsvorhaben E-G1 wieder aufgegriffen und auf beliebige Ebenen im Raum übertragen. Durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Parameter werden Parallelogramme und Dreiecke beschrieben.

Die Berechnung von Schnittmengen zwischen Ebenen und Geraden ist sowohl über ein 3x3-LGS möglich, wenn beide in Parameterform vorliegen, als auch durch Einsetzen einer Geradengleichung in eine Koordinatengleichung. Für einen Wechsel zwischen Parameterform und Koordinatenform einer Ebene wird ein Normalenvektor mit Hilfe eines 2x3-Gleichungssystems bestimmt. Die Entscheidung über Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden kann direkt mit der Schnittmengenberechnung verknüpft werden.

Unterrichtsvorhaben LK-5: *Lagebeziehungen und Abstandsberechnungen (LK-G3)*
(**Zeitbedarf**: ca. 23 Ustd.)

Inhaltsfeld: Analytische Geometrie und Lineare Algebra (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Lagebeziehungen und Abstände: Punkte, Geraden, Ebenen (alle Kombinationen)

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(4) untersuchen Lagebeziehungen von Ebenen sowie von Geraden und Ebenen
(10) bestimmen Abstände zwischen Punkten, Geraden und Ebenen,
(11) führen Spiegelungen an Ebenen durch
(12) untersuchen geometrische Objekte oder Situationen in innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen und deuten die Ergebnisse.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
- Darstellen von geometrischen Situationen im Raum

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,
Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen,
Kom-(9) dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,
Kom-(10) konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte,

Umsetzung:
Die Hesse-Normalenform[1] erlaubt es, Abstände eines Punktes von der Ebene sowie Abstände zwischen parallelen Ebenen direkt abzulesen. Dabei wird eine Verknüpfung zur Grundvorstellung der Projektion (LK-G1) hergestellt. Verfahrenstechnisch macht es keinen Unterschied, ob es sich nun um den Abstand eines Punktes, einer parallelen Geraden oder einer parallelen Ebene von einer Ebene handelt.

Die Achsenabschnittsform erleichtert es, Ebenen zeichnerisch darzustellen. Die Achsenabschnittsberechnung ist dabei nur ein Spezialfall der besonders einfachen Schnittmengenberechnung zwischen Geraden und Ebenen (Durchstoßpunkt) in Koordinatenform.

Einen verständnisorientierten Zugang zur Abstandsberechnung zwischen einem Punkt und einer Ebene bietet das Lotfußpunktverfahren, das auch auf weitere Abstandsprobleme (vgl. LK-G4) übertragen werden kann. Die Abstandsbestimmung erweitert sowohl die Beschreibung von Lagebeziehungen als auch die Schnittmengenproblematik. Bei Ebenen wurden Abstandsbestimmungen bereits im Unterrichtsvorhaben LK-G2 mit der Hesse-Normalenform behandelt.
Am Beispiel des Vorbeifluges eines Flugzeugs an einem Hindernis unter Einhaltung eines Sicherheitsabstandes wird entdeckt, wie der Abstand eines Punktes von einer Geraden u. a. über die Bestimmung eines Lotfußpunktes ermittelt werden kann. Hierbei werden unterschiedliche Lösungswege zugelassen und verglichen, insbesondere ein Lösungsweg mit den Mitteln der Analysis. Die Mittel der Analysis lassen sich auch nutzen, um im Anschluss den minimalen Abstand zweier Flugobjekte mithilfe eines MMS zu bestimmen.
Im Unterschied dazu knüpft die Abstandsberechnung von Flugbahnen an die Untersuchung von Lagebeziehungen von Geraden aus dem Unterrichtsvorhaben E-G2 an. Ihre Berechnung kann für den Vergleich unterschiedlicher Lösungsvarianten - insbesondere unter Einschluss von Hilfsebenen - genutzt werden. Dabei wird unterschieden, ob die Lotfußpunkte der kürzesten Verbindungsstrecke mitberechnet werden oder nicht.

<u>Unterrichtsvorhaben LK-6:</u> *Statistik und Wahrscheinlichkeit (LK-S1)*
(**Zeitbedarf**: ca. 15 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Mehrstufige Zufallsexperimente: Urnenmodelle, Baumdiagramme, Vierfeldertafeln, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Pfadregeln
- Kenngrößen: Erwartungswert, Varianz, Standardabweichung
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(1) planen und beurteilen statistische Erhebungen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(2) untersuchen und beurteilen Stichproben mithilfe von Lage- und Streumaßen, und verwenden das Summenzeichen,

(3) verwenden Simulationen zur Untersuchung stochastischer Situationen und nutzen dabei auch digitale Mathematikwerkzeuge,
(4) verwenden Urnenmodelle (Ziehen mit und ohne Zurücklegen) zur Beschreibung von Zufallsprozessen und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten
(5) bestimmen das Gegenereignis $\overline{A}$, verknüpfen Ereignisse durch die Operationen $A \setminus B$, $A \cap B$, $A \cup B$ und bestimmen die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten,
(7) beschreiben mehrstufige Zufallsexperimente mit Hilfe von Baumdiagrammen und Vierfeldertafeln und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten,
(8) prüfen Teilvorgänge mehrstufiger Zufallsexperimente mithilfe von Vierfeldertafeln und Baumdiagrammen auf stochastische Unabhängigkeit,
(9) lösen Problemstellungen im Kontext bedingter Wahrscheinlichkeiten,
(10) erläutern den Begriff der Zufallsgröße an geeigneten Beispielen und bestimmen Wahrscheinlichkeitsverteilungen diskreter Zufallsgrößen,
(11) bestimmen und deuten den Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung von diskreten Zufallsgrößen.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(10) recherchieren Informationen und Daten aus Medienangeboten (Printmedien, Internet und Formelsammlungen) und reflektieren diese kritisch
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen,
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren),
Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang,
Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus.

Umsetzung:
Es wird mit einer Wiederholung der Grundlagen aus der Sekundarstufe I gestartet. Zur Beschreibung einer von den Schülerinnen und Schülern selbstständig geplanten statistischen Erhebung (z.B. Größe, Gewicht von Neugeborenen) wird das Grundverständnis von Lage- und Streumaßen durch Rückgriff auf die Erfahrungen der Schülerinnen und Schüler mit Boxplots reaktiviert. Zur Auswertung und graphischen Darstellung von statistischen Erhebungen wird ein MMS verwendet. Über eingängige Beispiele von Stichproben mit gleichem arithmetischem Mittel, aber unterschiedlicher Streuung, wird die Definition der Standardabweichung als Wurzel der mittleren quadratischen Abweichung motiviert. Durch Vergleiche unterschiedlicher Stichproben wird ein Gespür für die Auswirkung auf die Kenngrößen entwickelt. Dabei wird das Summenzeichen zur Notation von arithmetischem Mittel und quadratischer Abweichung verwendet.

Anhand von Glücksspielen und Zufallsexperimenten, die von den Lernenden selbst durchgeführt werden, werden die grundlegenden Inhalte der Stochastik aus der SI wiederholt, vertieft und die Fachbegriffe gefestigt. Dabei werden zur Modellierung von Wirklichkeit auch Simulationen – zumeist unter Verwendung eines MMS – geplant und durchgeführt (Gesetz der großen Zahlen). Zur Beschreibung von Ereignissen werden die Mengenschreibweisen eingeführt und angewendet.

Die aus der Sekundarstufe I bekannten Vierfeldertafeln und Baumdiagramme werden im Kontext von zwei- und mehrstufigen Zufallsexperimenten zur Berechnung bedingter Wahrscheinlichkeiten beim Vertauschen von Merkmal und Bedingung sowie zur Überprüfung von Teilvorgängen auf stochastische Unabhängigkeit eingesetzt. Bei der Erfassung stochastischer Zusammenhänge und dem Umgang mit Mengenschreibweisen ist die Unterscheidung von Wahrscheinlichkeiten des Typs $P(A \cap B)$ von bedingten Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$ – auch sprachlich – von besonderer Bedeutung.

Die Erarbeitung erfolgt im Rahmen von sinnstiftenden Kontexten, wie Zufallsantworten bei sensitiven Fragen und Diagnosetests für Krankheiten (z.B. Corona-Test).
Anhand verschiedener Glücksspiele wird der Begriff der (diskreten) Zufallsgröße und der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilung (als Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den möglichen Werten, die die Zufallsgröße annimmt) zur Beschreibung von Zufallsexperimenten eingeführt. Analog zur Betrachtung der Kenngrößen bei empirischen Häufigkeitsverteilungen werden der Erwartungswert, die Varianz und die Standardabweichung einer diskreten Zufallsgröße definiert und im Sachkontext angewendet. In diesem Zuge werden insbesondere Urnenmodelle als Vorbereitung für die Q2 wiederholt.

Summe Leistungskurs Q1: 150 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 117 Unterrichtsstunden

Qualifikationsphase

Leistungskurs Q2

Unterrichtsvorhaben LK-7 *Binomialverteilung (LK-S2)*
(**Zeitbedarf**: ca. 19 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Diskrete Zufallsgrößen: Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Kenngrößen

- Binomialverteilung: Kenngrößen, Histogramme
- Binomialverteilung: Binomialkoeffizient

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(6) erklären die kombinatorische Bedeutung des Binomialkoeffizienten und berechnen diesen in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel

(12) begründen, dass bestimmte Zufallsexperimente durch binomialverteilte Zufallsgrößen beschrieben werden können.

(13) erklären die Binomialverteilung und beschreiben den Einfluss der Parameter n und p auf die Binomialverteilung, ihre Kenngrößen und die graphische Darstellung

(14) nutzen die Binomialverteilung und ihre Kenngrößen zur Beschreibung von Zufallsexperimenten und zur Lösung von Problemstellungen

(15) interpretieren die bei einer Stichprobe erhobene relative Häufigkeit als Schätzung einer zugrundeliegenden unbekannten Wahrscheinlichkeit.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Ermitteln der Kennzahlen statistischer Daten und von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei binomialverteilten (...) Zufallsgrößen

Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,

Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu,

Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,

Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen,

Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit,

Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,

Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,

Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,

Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,

Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,

Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,

Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch),

Arg-(8) verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,

Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,

Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.

Umsetzung:

Urnenmodelle werden zunächst verwendet, um grundlegende Zählprinzipien wie das Ziehen mit/ohne Zurücklegen mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge zu thematisieren, und zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten genutzt. Durch die Fokussierung auf lediglich zwei mögliche Ergebnisse („Erfolg" oder „Misserfolg") wird der Begriff des Bernoulli-Experiments eingeführt. Durch einen Vergleich mit dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen wird geklärt, dass die Anwendung des Modells Bernoullikette jeweils eine bestimmte Realsituation voraussetzt, d.h. dass die Treffer von Stufe zu Stufe unabhängig voneinander mit konstanter Wahrscheinlichkeit erfolgen.

Der Schwerpunkt bei der Betrachtung von Binomialverteilungen soll auf der Modellierung stochastischer Situationen liegen. Dabei werden zunächst Bernoulliketten in realen Kontexten oder in Spielsituationen betrachtet. Das Vorliegen einer Bernoullikette soll dabei explizit begründet werden und in einzelnen Fällen einer Modellkritik unterzogen werden. Zur formalen Herleitung der Binomialverteilung und des Binomialkoeffizienten bieten sich das Galtonbrett bzw. seine Simulation sowie die Betrachtung von Multiple-Choice-Tests an. Ausgehend von der kombinatorischen Bedeutung wird der Binomialkoeffizient im Folgenden in einfachen Fällen auch ohne Hilfsmittel berechnet. Zur Visualisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden Histogramme genutzt.

Die anschließende Vertiefung erfolgt in unterschiedlichen Sachkontexten, deren Bearbeitung auf Zeitungsartikeln basieren kann. Auch Beispiele der Modellumkehrung werden betrachtet („Von der Verteilung zur Realsituation"). Die Werte der Binomialverteilung, insbesondere der kumulierten Binomialverteilung, werden in der Regel mithilfe eines MMS berechnet. Hilfsmittelfreie Zugänge sind jedoch in Einzelfällen unter anderem durch Betrachtung von Komplementärereignissen möglich.
Eine Visualisierung der Binomialverteilung sowie des Einflusses von Stichprobenumfang n und Trefferwahrscheinlichkeit p erfolgt durch die graphische Darstellung der Verteilung als Histogramm. Anhand derartiger Wahrscheinlichkeitsverteilungen werden der Erwartungswert und die Standardabweichung einer Binomialverteilung hergeleitet. Eine Möglichkeit zur Herleitung der Standardabweichung ist, mithilfe eines MMS bei festem n und p für jedes k die quadratische Abweichung vom Erwartungswert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit zu multiplizieren. Die Varianz als Summe dieser Werte wird zusammen mit dem Erwartungswert in einer weiteren Tabelle notiert. Durch systematisches Variieren von n und p entdecken die Lernenden die funktionale Abhängigkeit der Varianz von diesen Parametern und die Formel $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$.

In verschiedenen Anwendungszusammenhängen werden sodann Problemstellungen mit binomia verteilten Zufallsgrößen untersucht, die jeweils eine Berechnung der Parameter k, p oder n verlangen. Mit dem Erwartungswert lässt sich auch der Begriff eines „fairen" Spiels aufgreifen

Unterrichtsvorhaben LK-8: *Prognoseintervalle – Konfidenzintervalle – Normalverteilung (LK-S3)*
(**Zeitbedarf**: ca. 19 Ustd.)

Inhaltsfeld: Stochastik (S)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Binomialverteilung: σ-Regeln
- Beurteilende Statistik: Prognoseintervall, Konfidenzintervall, Stichprobenumfang
- Normalverteilung: Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve"), Parameter μ und σ, Graph der Verteilungsfunktion

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(16) ermitteln mithilfe der σ-Regeln Prognoseintervalle für die absoluten und relativen Häufigkeiten in einer Stichprobe und interpretieren diese im Sachkontext
(17) ermitteln auf Grundlage einer relativen Häufigkeit ein Konfidenzintervall für den Parameter p einer binomialverteilten Zufallsgröße und interpretieren das Ergebnis im Sachkontext (Schluss von der Stichprobe auf die Grundgesamtheit)

(18) schätzen den für ein Konfidenzintervall vorgegebener Länge erforderlichen Stichprobenumfang ab
(19) unterscheiden diskrete und stetige Zufallsgrößen und deuten die Verteilungsfunktion als Integralfunktion
(20) untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen
(21) beschreiben den Einfluss der Parameter μ und σ auf die Normalverteilung und die graphische Darstellung ihrer Dichtefunktion („Gauß'sche Glockenkurve")

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
- Variieren der Parameter von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Berechnen von Wahrscheinlichkeiten bei (...) im Leistungskurs auch normalverteilten Zufallsgrößen
- Berechnen der Grenzen von Konfidenzintervallen im Leistungskurs

Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,
Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,
Kom-(1) erfassen, strukturieren und formalisieren Informationen aus zunehmend komplexen mathematikhaltigen analogen und digitalen Quellen sowie aus mathematischen Fachtexten und Unterrichtsbeiträgen,
Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren,
Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen,
Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind,
Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.
Kom-(12) nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.
Kom-(14) vergleichen und beurteilen mathematikhaltige Informationen und Darstellungen in Alltagsmedien unter mathematischen Gesichtspunkten,
Kom-(15) führen Diskussionsbeiträge zu einem Fazit zusammen.

Umsetzung:
Das Konzept der σ-Umgebungen wird durch die Untersuchung von Binomialverteilungen mit verschiedenen n und p entwickelt. Die σ-Regeln werden benutzt, um Prognoseintervalle für unterschiedliche Sicherheitswahrscheinlichkeiten zu ermitteln und im Sachzusammenhang zu interpretieren.

Am Ende dieses Unterrichtsvorhabens bietet sich die Möglichkeit, den Zusammenhang zwischen Stichprobenumfang und der Länge des Prognoseintervalls zu untersuchen und durch eine Visualisierung mithilfe eines MMS das $\frac{1}{\sqrt{n}}$ - Gesetz der großen Zahlen zu veranschaulichen.
Ausgehend von der Modellierung einer Sachsituation (z.B. Wahrscheinlichkeit von Retouren im Onlinehandel; Glücksrad auf einer schiefen Ebene; Eichgewicht bei Lebensmittelverpackungen) mit einer Binomial-verteilung, deren Trefferwahrscheinlichkeit p unbekannt ist, stellt sich die Frage nach der Schätzung der unbekannten Trefferwahrscheinlichkeit. Eine erste Annäherung erfolgt durch die Punktschätzung der relativen Häufigkeit in einer Stichprobe (Rückschluss auf die Gesamtheit).

Um zu einer Intervallschätzung zu kommen, werden zunächst mithilfe eines MMS von der Trefferwahrscheinlichkeit p abhängige 95%-Prognoseintervalle in einem Ellipsendiagramm dargestellt, deren Randfunktionen durch $h_\pm$ mit $h_\pm(p) = p \pm 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}$ beschrieben werden.

Mithilfe dieser Darstellung kann für eine relative Häufigkeit in einer Stichprobe ein Intervall von Wahrscheinlichkeiten bestimmt werden, das mit dieser Stichprobe „verträglich“ ist. Dieses Intervall wird als Konfidenzintervall bezeichnet (Rückschluss auf die Gesamtheit). Um Konfidenzintervalle für andere relative Häufigkeiten, Sicherheitswahrscheinlichkeiten (Konfidenzniveaus) und Stichprobengrößen zu ermitteln, werden die Grenzen von Konfidenzintervallen auch rechnerisch mithilfe eines MMS bestimmt.

Gegen Ende des Unterrichtsvorhabens wird auch die Mindestgröße n einer Stichprobe zu einer vorgegebenen Länge eines Konfidenzintervalls abgeschätzt.
Normalverteilungen sind in der Stochastik bedeutsam, weil sich die Summenverteilung von genügend vielen unabhängigen Zufallsvariablen häufig durch eine Normalverteilung approximieren lässt. Dazu bietet sich an, zunächst mit einem MMS die Häufigkeiten der Augensummen von zwei, drei, vier… Würfeln zu simulieren, wobei in der graphischen Darstellung die Glockenform zunehmend deutlicher wird. Ergebnisse von Schulleistungstests oder Intelligenztests werden erst vergleichbar, wenn man sie hinsichtlich des Mittelwerts und der Standardabweichung normiert, was ein Anlass dafür ist, mit den Parametern μ und σ zu experimentieren. Auch Untersuchungen zu Mess- und Schätzfehlern bieten einen anschaulichen, ggf. handlungsorientierten Zugang, beispielsweise bei der Untersuchung des Abstandes der Wurftreffer zum Mittelpunkt einer Dartscheibe oder der Länge zufällig ausgewählter Schrauben.

Hervorzuheben ist im Unterricht, dass es sich bei Normalverteilungen um Wahrscheinlichkeitsverteilungen von stetigen Zufallsgrößen handelt, im Unterschied zu den bislang behandelten diskreten Zufallsgrößen.

Da auf dem MMS (und auch auf dem WTR) Normalverteilungen einprogrammiert sind, spielt die Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (Satz von de Moivre-Laplace) für die Anwendungsbeispiele im Unterricht eine untergeordnete Rolle. Dennoch sollte bei genügender Zeit deren Herleitung als Vertiefung der Integralrechnung im Leistungskurs thematisiert werden, da der Übergang von der diskreten zur stetigen Verteilung in Analogie zur Approximation von Flächen durch Produktsummen nachvollzogen werden kann (vgl. LK-A3).

Die Visualisierung und Berechnung von Flächen bzw. Wahrscheinlichkeiten erfolgt mithilfe eines MMS.

Der Einsatz des MMS wird zum Anlass genommen, festzustellen, dass es sich bei der Dichtefunktion einer Normalverteilung („Gauß‘sche Glockenkurve“) um den Graphen einer Randfunktion handelt, zu deren Stammfunktion („Gauß‘sche Integralfunktion“) kein Term angegeben werden kann.

<u>Unterrichtsvorhaben LK-3:</u> *Exponentialfunktionen (LK-A3)*
(**Zeitbedarf**: ca. 19 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:
- Funktionen: Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Funktionsscharen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler
(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, [...], der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen

(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von [...], Exponentialfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion [...]
(10) beschreiben die Eigenschaften von Exponentialfunktionen der Form a^x und erläutern die Besonderheit der natürlichen Exponentialfunktion (f'=f)
(11) verwenden Exponentialfunktionen zur Beschreibung von begrenzten und unbegrenzten Wachstums- und Zerfallsvorgängen und beurteilen die Qualität der Modellierung
(12) untersuchen ausgewählte Funktionen, insbesondere die natürliche Exponential- und Logarithmusfunktion, auf Umkehrbarkeit und ermitteln in einfachen Fällen einen Funktionsterm der Umkehrfunktion unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich
(13) erläutern den Zusammenhang zwischen dem Graphen einer Funktion und dem Graphen seiner Umkehrfunktion
(23) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, der natürlichen Exponentialfunktion und daraus zusammengesetzten Funktionen [...]

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen
– Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen
– Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern
Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus
Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung,
Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor,
Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,
Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu
Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells,
Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung
Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen
Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit
Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen

Umsetzung:
In anwendungsbezogenen Kontexten (Wachstum und Zerfall) soll an die in der Sekundarstufe I erworbenen Kompetenzen zu allgemeinen Exponentialfunktionen der Form $x \mapsto a \cdot q^x$ angeknüpft werden. Dabei unterstützt ein MMS die Klärung der Bedeutung der Parameter a und q der allgemeinen Exponentialfunktion sowie die Beschreibung der Veränderungen durch Transformationen. Die Frage nach der Ableitung an einer Stelle führt zu einer vertiefenden Betrachtung des Übergangs von der durchschnittlichen zur momentanen Änderungsrate. Mit einem MMS kann das Verhalten des Differenzenquotienten für immer kleinere h betrachtet werden. Durch Variation der Stelle der Ableitung entdecken die Lernenden die Proportionalität der Änderungsrate zum Bestand (Differentialgleichung).

Anschließend wird die Basis variiert. Dabei ergibt sich für die Eulersche Zahl als Basis der Proportionalitätsfaktor eins bzw. die Übereinstimmung von Funktion und Ableitungsfunktion. Mithilfe des natürlichen Logarithmus können nun allgemeine Exponentialfunktionen in der Form $x \mapsto a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ geschrieben und als Transformation (Streckung) der natürlichen Exponentialfunktion identifiziert werden.

Als Anwendung werden Wachstumsprozesse auch mit natürlichen Exponentialfunktionen beschrieben. Weiterführend werden auch begrenzte Wachstumsprozesse und Wachstumsprozesse mit Parametern (Funktionsscharen) betrachtet.

Der Vergleich unterschiedlicher Modellierungen (linear, quadratisch, exponentiell und begrenzt) führt zu einer kritischen Auseinandersetzung mit der Modellbildung. Die zugrundeliegenden Annahmen und die Grenzen der Modelle sind der Ausgangspunkt, um Verbesserungen der Modellierung zum Beispiel durch abschnittsweise Kombination verschiedener Wachstumsmodelle herbeizuführen.

Anknüpfend an den Übergang von $a \cdot q^x$ zu $a \cdot e^{\ln(q) \cdot x}$ und Umkehrung der Fragestellung bei Wachstumsprozessen, wird der Logarithmus nun nicht nur als Operator, sondern als (Umkehr-) Funktion betrachtet. Die Umkehrbarkeit von Funktionen wird ausgehend von graphischen Darstellungen und jeweils variierenden Definitionsbereichen am Beispiel der natürlichen Exponential- / Logarithmusfunktion und an anderen passenden Funktionen (z.B. Potenz- / Wurzelfunktionen) sowie Transformationen von diesen thematisiert. In einfachen Fällen werden Funktionsterme von Umkehrfunktionen dabei hilfsmittelfrei ermittelt. Der Zusammenhang zwischen den Graphen einer Funktion und ihrer Umkehrfunktion wird unter Berücksichtigung von Definitions- und Wertebereich als Symmetrie zur Winkelhalbierenden erkannt.

Die Ableitung der natürlichen Logarithmusfunktion wird innermathematisch über den graphischen Zusammenhang zur natürlichen Exponentialfunktion (Winkelhalbierende als Symmetrieachse) und aus der Steigung einer gespiegelten Tangente hergeleitet. Damit wird der natürliche Logarithmus als Stammfunktion der Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ identifiziert.

Unterrichtsvorhaben LK-4: *Weitere Funktionen (LK-A4)*

(**Zeitbedarf**: ca. 18 Ustd.)

Inhaltsfeld: Funktionen und Analysis (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Funktionen: ganzrationale Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen der Form f(x)=a sin(bx+c)+d und entsprechende Kosinusfunktion
- Eigenschaften von Funktionen: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen, Symmetrie, Verhalten für $x \to \pm\infty$
- Fortführung der Differentialrechnung: Produktregel, Extremwertprobleme, Rekonstruktion von Funktionstermen („Steckbriefaufgaben"), Kettenregel, Funktionsscharen

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

(3) nutzen die Eigenschaften von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen, Sinusfunktionen, Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion und von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten sowie der Transformationen dieser Funktionen zur Beantwortung von Fragestellungen

(6) bilden ohne Hilfsmittel die Ableitungen von [...] Sinus- und Kosinusfunktionen, der natürlichen Logarithmusfunktion sowie von Potenzfunktionen mit rationalem Exponenten und wenden die Produkt- und Kettenregel an

(9) nutzen zusammengesetzte Funktionen (Summe, Produkt, Verkettung) zur Beschreibung quantifizierbarer Zusammenhänge

(23) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen, Exponentialfunktionen und daraus zusammengesetzten Funktionen sowie mithilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,

Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus

Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen,

Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum …
– zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen

Ope-(14) reflektieren die Möglichkeiten und Grenzen digitaler Mathematikwerkzeuge,

Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle,

Pro-(5) nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern)

Arg-(11) ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,

Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,

Umsetzung:

In diesem Unterrichtsvorhaben werden auch periodische Prozesse (z.B. Sonnenscheindauer, akustische Signale) untersucht, bei denen Sinus- und Kosinusfunktionen abgeleitet und mit anderen Funktionen verknüpft werden. Außerdem werden die noch fehlenden Ableitungsregeln (Produkt- und Kettenregel) hergeleitet. Die Vorstellung des Ableitens als lokale lineare Approximation wird dabei mithilfe eines MMS aufgegriffen. Die Ableitungsregeln können zunächst als Vermutungen für die Ableitungen von Produkten von ganzrationalen Funktionen bzw. für einfache Verkettungen (z.B. Potenz einer ganzrationalen Funktion) aufgestellt und durch Ausmultiplizieren und Anwenden der bereits bekannten Ableitungsregeln überprüft werden. Mindestens eine der neuen Ableitungsregeln soll bewiesen werden. An dieser Stelle sind Differenzierungen z.B. durch Einsatz eines Beweispuzzles oder Beurteilungen von vorgelegten Argumentationsketten möglich.

Mithilfe der neu gewonnenen Ableitungsregeln werden schließlich zusammengesetzte Funktionen (auch mit Exponentialfunktionen und Sinus- / Kosinusfunktionen) untersucht und in unterschiedlichen innermathematischen und anwendungsbezogenen Aufgaben eingesetzt. Dabei werden auch Funktionsscharen betrachtet. Vorgelegte Stammfunktionen werden nachgewiesen und verwendet. Neben rechnerischen Zugängen werden außerdem Eigenschaften von Funktionen als Argumente zur Lösung von Aufgaben verwendet.

Abschließend werden die Erkenntnisse aus der bisherigen Unterrichtsreihe gebündelt und an komplexeren Situationen sowohl bei innermathematischen Problemstellungen als auch bei Aufgaben mit Anwendungsbezug geübt und vertieft.

Anhand der Volumina von Körpern (einfache geometrische Grundkörper, Gefäße, Zeppelin, …), die sich durch Rotation eines Graphen um die x-Achse beschreiben lassen, werden verschiedene Aspekte der Differential- und Integralrechnung vernetzt und vertieft:

- Aufstellen der Randfunktion mit Definitionsbereich (Vernetzung mit Steckbriefaufgaben)
- Integralvorstellung (Kreisscheiben, Grenzwertprozess)
- Nachweis / Bildung von Stammfunktionen

- Berechnung von bestimmten Integralen

Anschließend werden Prozesse, bei denen das Wachstum erst zu- und dann wieder abnimmt (Medikamentenkonzentration, Fieber, Pflanzenwuchs…), in den Blick genommen und mithilfe von Produkten und Verkettungen von Funktionen modelliert. Dabei ergeben sich Fragen, bei denen aus der Wachstumsgeschwindigkeit auf den Gesamtbestand bzw. -effekt geschlossen wird. In geeigneten Kontexten werden uneigentliche Integrale als Grenzwert der jeweils zugehörigen Integralfunktion eingeführt und bestimmt.

Integrale von zusammengesetzten Funktionen, Exponentialfunktionen und Sinusfunktionen werden in diesem Unterrichtsvorhaben mit einem MMS oder mithilfe vorgegebener Stammfunktionen berechnet.

Vertiefung:

- Bei der Betrachtung von Rotationskörpern bieten Hohlkörper und der Torus (z.B. Fahrradschlauch) einen erhöhten Schwierigkeitsgrad

Summe Leistungskurs Q2: 112,5 Unterrichtsstunden

Vereinbarungsgemäß in Unterrichtsvorhaben verplant: 75 Unterrichtsstunden

2.2 Grundsätze der fachdidaktischen und fachmethodischen Arbeit

Überfachliche Grundsätze:

1.) Schülerinnen und Schüler werden in dem Prozess unterstützt, selbstständige, eigenverantwortliche, selbstbewusste, sozial kompetente und engagierte Persönlichkeiten zu werden.
2.) Der Unterricht nimmt insbesondere in der Einführungsphase Rücksicht auf die unterschiedlichen Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler.
3.) Geeignete Problemstellungen bestimmen die Struktur der Lernprozesse.
4.) Die Unterrichtsgestaltung ist grundsätzlich kompetenzorientiert angelegt.
5.) Der Unterricht vermittelt einen kompetenten Umgang mit Medien. Dies betrifft sowohl die private Mediennutzung als auch die Verwendung verschiedener Medien zur Präsentation von Arbeitsergebnissen.
6.) Der Unterricht fördert das selbstständige Lernen und Finden individueller Lösungswege sowie die Kooperationsfähigkeit der Schülerinnen und Schüler.
7.) Die Schülerinnen und Schüler werden in die Planung der Unterrichtsgestaltung einbezogen.
8.) Der Unterricht wird gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern evaluiert.
9.) Die Schülerinnen und Schüler erfahren regelmäßige, kriterienorientierte Rückmeldungen zu ihren Leistungen.
10.) In verschiedenen Unterrichtsvorhaben werden fächerübergreifende Aspekte berücksichtigt.

2.3 Grundsätze der Leistungsbewertung und Leistungsrückmeldung

2.3.1. Grundlagen

Bei der Leistungsbewertung von Schülerinnen und Schülern sind die erbrachten Leistungen in den Beurteilungsbereichen „Schriftliche Arbeiten“ und „Sonstige Leistungen im Unterricht“ angemessen zu berücksichtigen. Dabei gehen beide Bereiche zu jeweils etwa 50 % in die Gesamtnote ein. Es gelten die Vorgaben des Schulgesetzes, der APO-GOSt sowie der Richtlinien des Faches Mathematik in der jeweils gültigen Fassung.

Die Leistungsbewertung insgesamt bezieht sich auf die im Zusammenhang mit dem Unterricht erworbenen Kompetenzen.

Erfolgreiches Lernen ist kumulativ. Entsprechend sind die Kompetenzerwartungen in den Bereichen des Faches jeweils in ansteigender Progression und Komplexität formuliert. Dies bedingt, dass Unterricht und Lernerfolgsüberprüfungen darauf ausgerichtet sind, den Lernenden Gelegenheit zu geben, grundlegende Kompetenzen, die sie in den vorangegangenen Jahren erworben haben, wiederholt und in wechselnden Kontexten anzuwenden. Die Beurteilung von Leistungen wird mit der Diagnose des erreichten Lernstandes und individuellen Hinweisen für das Weiterlernen verbunden. Für den weiteren Lernfortschritt ist es wichtig, bereits erreichte Kompetenzen herauszustellen und zum Weiterlernen zu ermutigen.

Leistungsbewertung bedeutet für Lernende eine Hilfe für weiteres Lernen. Sie ist die Grundlage für die weitere Förderung der Lernenden, für ihre Beratung und die Beratung der Erziehungsberechtigten sowie für Schullaufbahnentscheidungen.

Leistungsbewertung ist ein kontinuierlicher Prozess. Sie bezieht sich auf Kompetenzen, wie sie in den Richtlinien für das Fach Mathematik angegeben werden, und auf Inhalte, die im Unterricht vermittelt werden. Alle im Lehrplan ausgewiesenen Bereiche sollen bei der Leistungsbewertung angemessen berücksichtigt werden. Dabei kommt den prozessbezogenen Kompetenzen der gleiche Stellenwert zu wie den inhaltsbezogenen Kompetenzen.

2.3.2. Schriftliche Arbeiten (Klausuren)

Anzahl und Dauer der Leistungsüberprüfungen: EF

Jahrgangsstufe	Halbjahr 1.1	Halbjahr 1.2	Halbjahr 2.1	Halbjahr 2.2
EF	**90´**	**90´**	**90´**	**100´** **Zentrale Klausur**

Anzahl und Dauer der Leistungsüberprüfungen: Q1

Kurs	Klausurlänge
GK	**135 Minuten**
LK	**180 Minuten**

Anzahl und Dauer der Leistungsüberprüfungen: Q2.1

Kurs	Klausurlänge
GK	**180 Minuten**
LK	**225 Minuten**

Anzahl: In allen Jahrgangsstufen werden in jedem Halbjahr zwei Klausuren geschrieben. Jede Klausur enthält einen hilfsmittelfreien Teil (etwa 25-30% der Gesamtzeit) . Im Halbjahr 2.2 der EF wird die zentrale Vergleichsklausur geschrieben. Die erste Klausur in Q2.2 ist die Vorabiturklausur und wird unter Abiturbedingungen geschrieben (Zeitvorgabe, Aufgabenanzahl etc.)

Klausuren dienen der schriftlichen Überprüfung von Lernergebnissen. In ihnen sollen die Lernenden die im Unterricht erworbenen Sachkenntnisse und Fähigkeiten nachweisen. Sie geben darüber Aufschluss, inwieweit im laufenden Kursabschnitt gesetzte Ziele erreicht worden sind. Sie bereiten auf die komplexen Anforderungen in der Abiturprüfung vor. Zahl und Dauer der in der Sekundarstufe II zu schreibenden Klausuren sind in der APO-GOSt geregelt. Im 2. Halbjahr der Jahrgangsstufe 12 kann die erste Klausur durch eine Facharbeit ersetzt werden. Die Note der Facharbeit wird wie eine Klausurnote gewertet.

Die Aufgabenstellungen sollen die Vielfalt der im Unterricht erworbenen Kompetenzen und Arbeitsweisen widerspiegeln. Die Aufgaben werden umfangreicher und komplexer. Sie beschränken sich nicht auf Reproduktion; Schülerinnen und Schüler bearbeiten Aufgaben, bei denen es um Begründungen, Darstellung von Zusammenhängen, um Interpretationen und kritische Reflexionen geht. Insofern enthalten Klausuren in der Regel neben wiederholenden und bekannte Unterrichtsinhalte anwendenden auch weiterführende Aufgaben, die eine selbständige Leistung erfordern (Anforderungsbereich III). Erläuternde und erklärende Texte werden in stärkerem Maße eingefordert.

Bei der Korrektur werden auch Teillösungen und Lösungsansätze hinreichend bei der Punktevergabe berücksichtigt.

Stellt eine Schülerin/ein Schüler fest, dass ein Lösungsweg fehlerhaft ist, weil z.B. das Ergebnis nicht plausibel erscheint, und macht sie/er das durch einen geeigneten Kommentar deutlich, so ist dies bei der Bewertung positiv zu berücksichtigen.

Die Art der Darstellung, Präzision und der angemessene Gebrauch der mathematischen Fachsprache sowie die sprachliche Richtigkeit werden bei der Bewertung angemessen berücksichtigt.

Bei der Zuordnung einer Note zu einer erreichten Punktzahl gilt in der Sekundarstufe II in der Regel folgender Schlüssel:

Note	Erreichte Wertungspunktzahl in %
1	100 – 85
2	84 – 70
3	69 – 55
4	54 – 40
5	39 – 19
6	18 – 00

In der Regel wird für eine Klausur die Note „noch ausreichend“ erteilt, wenn der Anteil der Wertungspunkte zwischen 44 % und 40 % liegt.

2.3.3. Sonstige Leistungen im Unterricht

Der Bewertungsbereich „Sonstige Leistungen im Unterricht“ erfasst die Qualität und Kontinuität der Beiträge, die die Lernenden im Unterricht einbringen. Diese Beiträge umfassen unterschiedliche mündliche und schriftliche Formen in enger Bindung an die Aufgabenstellung und das Anspruchsniveau der jeweiligen Unterrichtseinheit. Gemeinsam ist diesen Formen, dass sie in der Regel einen längeren, abgegrenzten, zusammenhängenden Unterrichtsbeitrag einer einzelnen Schülerin/eines einzelnen Schülers bzw. einer Gruppe von Lernenden darstellen.

Selbstständiges Arbeiten sowie das Arbeiten in Gruppen und Projekten spielt in der Sekundarstufe II eine entscheidende Rolle. Bei der Bewertung werden beispielsweise folgende Gesichtspunkte berücksichtigt: Informationen beschaffen und erschließen; Arbeitsschritte überprüfen, diskutieren und dokumentieren; Gesprächsführung, Protokollführung, Berichterstattung übernehmen; Gruppenarbeit organisieren und effizient durchführen; systematische und heuristische Vorgehensweisen nutzen.

Zu „Sonstigen Leistungen“ zählen beispielsweise:

- Beiträge zum Unterrichtsgespräch in Form von Lösungsvorschlägen, das Aufzeigen von Zusammenhängen und Widersprüchen, Plausibilitätsbetrachtungen oder das Bewerten von Ergebnissen,
- Kooperative Leistungen im Rahmen von Partner- und Gruppenarbeit (Anstrengungsbereitschaft, Teamfähigkeit, Zuverlässigkeit),
- Anfertigen von Hausaufgaben (Regelmäßigkeit, Vollständigkeit, Qualität),
- im Unterricht eingeforderte Leistungsnachweise (z.B. vorgetragene Hausaufgaben oder Protokolle einer Einzel- oder Gruppenarbeitsphase, angemessene Führung eines Heftes bzw. einer Mappe, eines Lerntagebuchs,
- kurze, schriftliche Überprüfungen (ca. 20 – 30 Minuten Dauer, Unterrichtsinhalte der letzten ca. 4 – 6 Stunden),

- Referate bzw. langfristig vorbereitete umfangreiche schriftliche Hausarbeiten über eine mathematische Fragestellung; dabei ist Folgendes zu beachten:
  - Einhaltung der vorgegebenen Vorbereitungs- und Vortragszeit
  - sprachlich angemessener und für die Lernenden verständlicher Vortrag unter
  - Benutzung sinnvoller Medien (Tafel,, Folie, Computer-Werkzeuge)
  - Herstellung von schriftlichen Zusammenfassungen des Vortrags (auf Wunsch der Lehrkraft bzw. der Lerngruppe),
- Kompetenz im Umgang mit Mathematik bezogener Software (z.B. Tabellenkalkulation, Geometriesoftware),
- besondere Lernleistung (z.B. erfolgreiche Teilnahme an Wettbewerben)

Leistungsbe-wertung im Fach *Mathematik Sek. I*	Häufigkeit der mündlichen Mitarbeit im Unterricht	Aufmerksamkeit im Unterricht	Selbstständiges Arbeiten im Unterricht	Qualität der Mitarbeit im Unterricht	Beherrschung der Fachsprache und der Fachmethoden	Zuverlässigkeit, Sorgfalt u.a.	Präsentation von Referaten und Aufgaben	Zusammenarbeit in der Lerngruppe
sehr gut Die Leistung entspricht den Anforderungen in besonderem Maße.	Der Schüler arbeitet in jeder Unterrichtsstunde immer mit.	Der Schüler ist jederzeit aufmerksam und denkt stets kritisch und kreativ mit.	Der Schüler setzt sich mit den gestellten Anforderungen selbstständig auseinander und findet immer Lösungen.	Der Schüler kann Gelerntes sicher wiedergeben und anwenden. Oft findet er auch neue Lösungswege.	Der Schüler kann die gelernten Methoden sehr sicher anwenden und auch auf neue Sachverhalte übertragen. Er beherrscht die Fachsprache in großem Umfang.	Wie „ausreichend“. Außerdem hält der Schüler seine Arbeitsmaterialien in Ordnung und geht sachgerecht und vorbildlich damit um.	Der Schüler ist sehr häufig und freiwillig bereit, Arbeitsergebnisse in den Unterricht einzubringen und vorzustellen.	Der Schüler hört immer genau zu, geht sachlich auf andere ein und ergreift bei der Arbeit fast immer die Initiative.
gut Die Leistung entspricht voll den Anforderungen.	Der Schüler arbeitet in jeder Unterrichtsstunde mehrfach mit.	Der Schüler ist jederzeit aufmerksam und denkt meist kritisch und kreativ mit.	Der Schüler setzt sich mit den gestellten Anforderungen selbstständig auseinander und findet meistens Lösungen.	Der Schüler kann Gelerntes sicher wiedergeben und anwenden. Manchmal findet er auch neue Lösungswege.	Der Schüler kann die gelernten Methoden sicher anwenden und beherrscht die Fachsprache.	Wie „ausreichend“. Außerdem hält der Schüler seine Arbeitsmaterialien in Ordnung und geht sachgerecht damit um.	Der Schüler ist häufig und freiwillig bereit, Arbeitsergebnisse in den Unterricht einzubringen und vorzustellen.	Der Schüler hört zu, geht sachlich auf andere ein, kann mit anderen erfolgreich an einer Sache arbeiten und ergreift häufig die Initiative.
befriedigend Die Leistung entspricht im Allgemeinen den Anforderungen.	Der Schüler arbeitet häufig mit.	Der Schüler ist jederzeit aufmerksam und denkt manchmal kritisch und kreativ mit.	Der Schüler setzt sich mit den gestellten Anforderungen selbstständig auseinander und findet oft Lösungen.	Der Schüler kann Gelerntes wiedergeben und meist auch anwenden. Er ist bereit nach neuen Lösungswegen zu suchen.	Der Schüler kann die gelernten Methoden anwenden. Die Fachsprache beherrscht er im Wesentlichen.	Wie „ausreichend“. Außerdem hält der Schüler seine Arbeitsmaterialien in Ordnung und geht meist sachgerecht damit um.	Der Schüler ist manchmal bereit, Arbeitsergebnisse in den Unterricht einzubringen und vorzustellen.	Der Schüler hört oft zu, geht sachlich auf andere ein, kann mit anderen an einer Sache arbeiten und ergreift manchmal die Initiative.
ausreichend Die Leistung zeigt Mängel, entspricht im Ganzen jedoch den Anforderungen.	Der Schüler arbeitet nur selten mit.	Der Schüler ist jederzeit aufmerksam.	Der Schüler ist bereit sich mit den gestellten Anforderungen selbstständig auseinanderzusetzen.	Der Schüler kann Gelerntes wiedergeben, aber nicht immer an anderen Beispielen anwenden.	Der Schüler kann die gelernten Methoden meist anwenden. Die Fachsprache beherrscht er in Grundzügen.	Der Schüler hat fast immer alle Arbeitsmaterialien mit, macht fast immer die Hausaufgaben und beginnt fast immer pünktlich mit seiner Arbeit.	Der Schüler ist selten bereit, Arbeitsergebnisse in den Unterricht einzubringen oder vorzustellen.	Der Schüler hört oft zu, geht sachlich auf andere ein und kann mit anderen an einer Sache arbeiten, zeigt dabei aber keine Eigeninitiative.
mangelhaft Die Leistung entspricht nicht den Anforderungen. Grundkenntnisse sind vorhanden. Mängel können in absehbarer Zeit behoben werden.	Der Schüler arbeitet ganz selten freiwillig mit.	Der Schüler ist nicht immer aufmerksam.	Der Schüler ist oft nicht bereit sich mit den gestellten Anforderungen auseinanderzusetzen.	Der Schüler kann Gelerntes nur mit Lücken oder falsch wiedergeben. An anderen Beispielen kann er dieses fast nie anwenden.	Der Schüler kann die gelernten Methoden nicht immer anwenden. Die Fachsprache beherrscht er nur wenig.	Der Schüler hat die Arbeitsmaterialien nicht immer vollständig mit macht die Hausaufgaben unregelmäßig und beginnt oft nicht pünktlich mit seiner Arbeit.	Der Schüler bringt Arbeitsergebnisse fast überhaupt nicht in den Unterricht ein.	Der Schüler hört nicht immer zu und geht nicht immer sachlich auf andere ein. Er arbeitet nur wenig erfolgreich mit anderen zusammen.

Die Note ***ungenügend*** wird erteilt, wenn die Leistung den Anforderungen nicht entspricht und auch die Grundkenntnisse so lückenhaft sind, dass die Mängel in absehbarer Zeit nicht behoben werden können.
Die Umsetzung orientiert sich an dem jeweiligen Entwicklungs- und Kenntnisstand der verschiedenen Jahrgangsstufen.

2.3.4. Mitglieder der Fachkonferenz

Svenja Darmstädter	Sina Schultz
Peter Käser (nur Sek I)	Julian Tamcke
Thorsten Klotz	Barbara Stahl
Wolfgang Tegethoff	Lea Schulte
Christof Hinz	Johannes Krupp
Ute Stalpers	Florian Schauen (nur Sek I)
Ulrich Ringbeck (nur Sek I)	

Beschluss der Fachkonferenz Mathematik vom …

2.4 Lehr- und Lernmittel

Lehrwerke
In der Sekundarstufe II sind folgende Lehrwerke verbindlich eingeführt:

- Einführungsphase
    - Buch: Lambacher Schweizer Mathematik, Einführungsphase; 1. Auflage, Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2024
- Qualifikationsphase I & II
    - Buch: Lambacher Schweizer Mathematik, Qualifikationsphase; 1. Auflage, Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2025

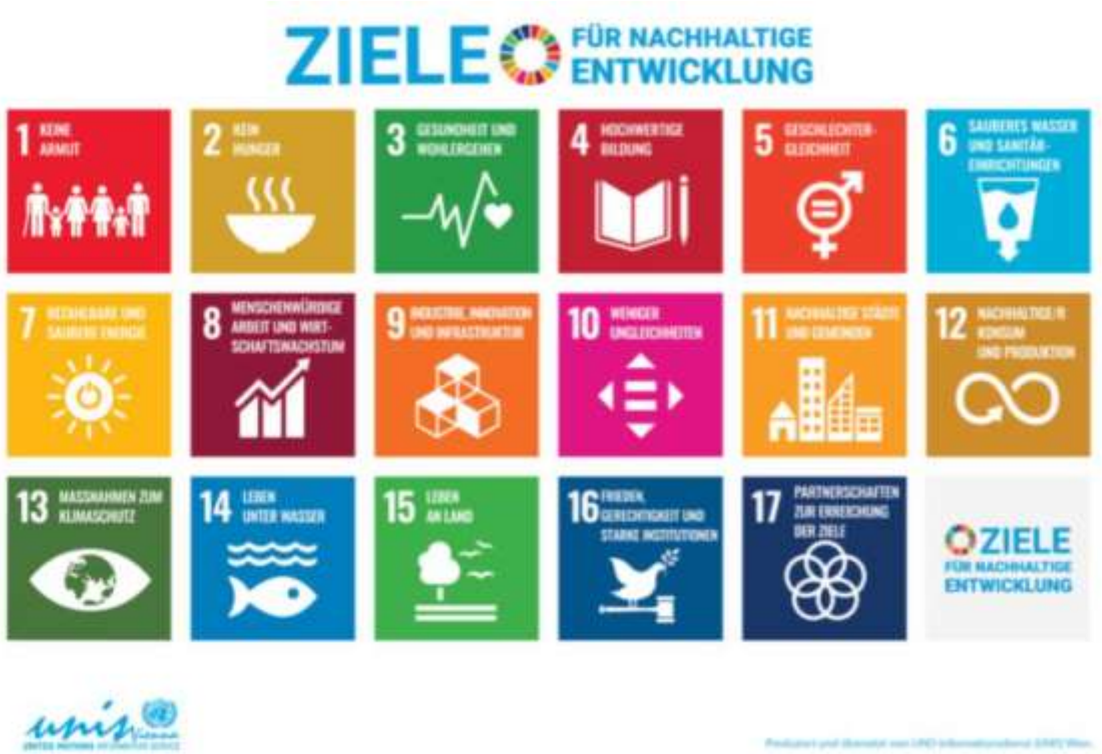
In der Bibliothek stehen außerdem weitere Lehrwerke zur Verfügung. Ausgehend von diesem schulinternen Lehrplan können zusätzlich fakultative Inhalte und Themen aus Schulbüchern nachrangig zum Gegenstand des Unterrichts gemacht werden. Diese eignen sich in vielen Fällen zur inneren Differenzierung.

Hilfsmittel
Neben der Verwendung von Lineal, Geodreieck und Zirkel, erfolgt der Einsatz von Tabellenkalkulationsprogrammen (Excel) und Dynamischer Geometriesoftware (GeoGebra) als App auf dem IPad.

Ab Oktober 2024 wird der wissenschaftliche Taschenrechner fx-810DE-CW von Klasse 7 bis zum Abitur genutzt und ersetzt damit den bisher genutzten grafikfähigen Taschenrechner.

2.5 Bildung für nachhaltige Entwicklung (BNE)

Bildung für nachhaltige Entwicklung gilt heute als wichtiges Prinzip schulischen Lernens. Erd-kunde ist inhaltlich in besonderes Maße an der BNE beteiligt. Als zweifach zertifizierte Schule im Bereich Nachhaltigkeit gilt BNE am Gymnasium am Neandertal in besonderem Maße als wichtiges Grundprinzip des Unterrichts. Die folgenden Nachhaltigkeitsziele (SDG) werden dabei verfolgt:



Quelle: https://www.bne.nrw/weltweit/sdgs/verstehen/

Ein Schwerpunkt der BNE im Mathematikunterricht zeigt sich am Gymnasium am Neandertal an den folgenden Aspekten im regulären Unterricht:

- Etablierung einer Projektwoche zum Thema Nachhaltigkeit in der EF ab dem Schuljahr 2024/2025: Klimakonferenz als Schwerpunkt dieser Woche: SDG 13

Im regulären Unterricht stehen in den verschiedenen Jahrgangsstufen jeweils die folgenden SDG-Ziele im Vordergrund:

- EF SDG: 1, 3, 4, 17
- Q1 SDG: 7, 8, 11, 12
- Q2 SDG: 3, 4, 5, 7 & 8

3 Prüfung und Weiterentwicklung des schulinternen Lehrplans

> Das schulinterne Curriculum stellt keine starre Größe dar, sondern ist als „dynamisches Dokument" zu betrachten. Dementsprechend sind die Inhalte stetig zu überprüfen, um ggf. Modifikationen vornehmen zu können. Die Fachkonferenz trägt durch diesen Prozess zur Qualitätsentwicklung und damit zur Qualitätssicherung des Faches bei.

Die Fachschaft Mathematik versteht sich als eine professionale Lerngemeinschaft (PLG) mit dem Ziel, den Unterricht an unserem Gymnasium zu verbessern und weiterzuentwickeln.[3]

Maßnahmen der fachlichen Qualitätssicherung:

Ein hohes Maß an Qualität wird durch eine zunehmende Parallelisierung des Unterrichts und einer aufbauenden Feedbackkultur gesichert. In den gemeinsamen Besprechungen der parallel unterrichtenden Lehrkräfte wird Raum geschaffen für den fachlichen und fachdidaktischen Austausch und für konkrete Absprachen über zu erreichende Ziele. Dazu dienen beispielsweise auch der regelmäßige Austausch über durchgeführte Unterrichtsvorhaben sowie die gemeinsame Konzeption von Unterrichtsmaterialien, welche hierdurch mehrfach erprobt und bezüglich ihrer Wirksamkeit beurteilt werden.

Dabei prüft das Fachkollegium kontinuierlich, inwieweit die im schulinternen Lehrplan vereinbarten Maßnahmen zum Erreichen der im Kernlehrplan vorgegebenen Ziele geeignet sind.

Freiwillige kollegiale Hospitationen im Unterricht können zudem Anlass geben, den eigenen Unterricht mit anderen Augen zu betrachten. Aus den Dienstbesprechungen wird einmal pro Halbjahr in der Fachkonferenz berichtet.

Alle Fachkollegen (ggf. auch die gesamte Fachschaft) nehmen regelmäßig an Fortbildungen teil, um fachliches Wissen zu aktualisieren und pädagogische sowie didaktische Handlungsalternativen zu entwickeln. Zudem werden die Erkenntnisse und Materialien aus fachdidaktischen Fortbildungen und Implementationen zeitnah in der Fachgruppe vorgestellt und für alle zentral digital zur Verfügung gestellt.

Es wird empfohlen, dass in den verschiedenen Grundkursen in jedem Jahrgang gemeinsam entwickelte Klausuren parallel geschrieben und evaluiert werden, daher finden diese in den unterschiedlichen Grundkursen auch zeitgleich statt. In den folgenden Fachkonferenzen werden die Erfahrungen ausgetauscht und die weitere Vorgehensweise abgesprochen.

Darüber hinaus werden die Aufgaben und Ergebnisse der zentralen Klausur in der EF und die des Zentralabiturs in der Fachkonferenz vorgestellt.

Für Vorbereitung auf die Zentralen Klausuren EF und das Zentralabitur wird auf die frei zugänglichen Prüfungsaufgaben der letzten Jahre[4] zurückgegriffen. Den Schülerinnen und Schülern wird der Zugang zu diesen Seiten ebenfalls ermöglicht. Viele Anregungen zur

[3] https://pikas.dzlm.de/material-allgemeine-schulentwicklung/kooperation-professionellen-lerngemeinschaften (Datum des letzten Zugriffs: 13.1.2020)
[4] https://www.standardsicherung.schulministerium.nrw.de/cms/zentrale-pruefungen-10/faecher/fach.php?fach=72 (Datum des letzten Zugriffs: 13.1.2020)

Gestaltung des Unterrichts sind in den jährlich erscheinenden Fachdidaktischen Rückmeldungen[5] zu den Prüfungen enthalten. Diese werden im Rahmen der Fachgruppe Mathematik vorgestellt und als Anlass zu weiteren Unterrichtsentwicklung genommen.

Überarbeitungs- und Planungsprozess:

In der Fachkonferenz werden Möglichkeiten der Weiterentwicklung der Zielsetzungen und Methoden des Unterrichts angeregt, diskutiert und Veränderungen im schulinternen Curriculum abgestimmt. Eine Evaluation erfolgt jährlich. In den Fachkonferenzen der Fachgruppe zu Schuljahresbeginn werden die Erfahrungen des vorangehenden Schuljahres ausgewertet und diskutiert sowie eventuell notwendige Konsequenzen formuliert. In den Jahrgangsstufenteams werden Änderungsvorschläge für den schulinternen Lehrplan vorgenommen, die im Rahmen der Fachkonferenzen abgestimmt werden. Insbesondere verständigen sie sich über alternative Materialien, Kontexte und die Zeitkontingente der einzelnen Unterrichtsvorhaben.

Die Ergebnisse dienen der/dem Fachvorsitzenden zur Rückmeldung an die Schulleitung und u.a. an die/den Fortbildungsbeauftragte/n, außerdem sollen wesentliche Tagesordnungspunkte und Beschlussvorlagen der Fachkonferenz daraus abgeleitet werden. Von der Fachgruppe Mathematik erkannte Fortbildungsnotwendigkeiten werden der Fortbildungskoordination benannt und entsprechende schulinterne Fortbildungen beantragt.

Weitergehende, insbesondere fachliche, fachdidaktische oder methodische Fortbildungen werden bedarfsgerecht von den Lehrkräften wahrgenommen. Die Inhalte der Fortbildung werden der Fachgruppe vorgestellt und gemeinsam zur Unterrichtsentwicklung genutzt.

[5] https://www.schulentwicklung.nrw.de/s/faecher/mathematik/-fachdidaktische-rueckmeldungen.html (Datum des letzten Zugriffs: 13.1.2020)